2025 年 度 / AY2025

大 学 院 入 学 試 験 問 題
Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数　　学 / Mathematics

試験時間 / Examination Time:　　13:00–15:30

注　意　事　項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第 1 問から第 3 問まであり，和文は 1 頁から 3 頁，英文は 4 頁から 6 頁である．全問を日本語ないし英語で解答すること．
   Three problems appear on pages 1–3 in Japanese and pages 4–6 in English in this booklet. Answer all of the three problems in Japanese or English.
4. 解答用紙 3 枚が渡される．1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given three answer sheets. You must use a separate answer sheet for each problem. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft sheets from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee number	No.

上欄に受験番号を記入すること．Fill the above box with your examinee number.

(草稿用紙)

第１問

2 次元平面において，直線は $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ のように表現できる．ここで (x, y) は直線上の点のデカルト座標であり，列ベクトル $(\alpha, \beta, \gamma)^{\mathrm{T}}$ を直線の係数ベクトルと呼ぶ．以下の問いに答えよ．ただし，解答中の係数ベクトルは $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ を満たすようにせよ．

(1) 2 次元平面上で点 $\vec{a}$ を通り，単位ベクトル $\vec{v}$ に垂直である直線の係数ベクトルをひとつ求めよ．

(2) 点 $\vec{b}$ を通り，単位ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線 B を考える．このとき，ある直線 A を直線 B に対して鏡像変換した直線を A$'$ とする．このとき，直線 A の係数ベクトルを直線 A$'$ の係数ベクトルに変換する 3 次元正方行列をひとつ求め，$\vec{b}$ と $\vec{n}$ を使って記述せよ．

(3) 問 (2) で求めた行列の行列式を求めよ．

(4) 実変数 t によって係数ベクトルが $\left(4t, 4t^2 - 1, t\right)^{\mathrm{T}}$ のように変化する直線 D_t の動きを考える．この直線は t の値によらずある一点を通る．その点の座標を求めよ．

(5) t によって変化するある直線 M_t に対する鏡像変換により，問 (4) で導入した直線 D_t が係数ベクトル $(0, 1, -t)^{\mathrm{T}}$ を持つ直線に変換されるとする．このような直線 M_t の係数ベクトル $(\alpha_t, \beta_t, \gamma_t)^{\mathrm{T}}$ を求めよ．ただし，$t > 0$ のとき，$\alpha_t > 0$，$\beta_t > 0$ とする．

(6) t が 0 から $+\infty$ まで変化するとき，問 (5) で求めた直線 M_t の存在し得る領域を簡潔な数式で表現し，図示せよ．

第2問

t を実数の独立変数，$a(t)$, $x(t)$, $y(t)$ を実数値関数として，以下の問いに答えよ．

(1) $a(t)$ は t に関する周期 T の周期関数であり，連続とする．このとき，以下の常微分方程式の初期値問題の解 $x(t)$ を求めよ．ここで，$x(0) = x_0 \neq 0$ とする．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = a(t)x(t)$$

(2) 問 (1) について， $x(t)$ が周期 T の周期解となる $a(t)$ の必要十分条件を求めよ．

(3) 以下の連立常微分方程式の初期値問題の解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ．ここで，k は実定数とし，$x(0) = x_0 \neq 0$, $y(0) = y_0 \neq 0$ とする．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= -kx(t) + \sin(t)\cos(t)y(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) &= (-k + \sin(t))y(t)\end{aligned}$$

(4) 問 (3) について，$k > 0$ の場合，$t \to \infty$ のときに $x(t)$, $y(t)$ がどのように収束するか簡単に説明せよ．

(5) 問 (3) について，$k = 0$ の場合，$x_0 = 2$, $y_0 = 1$ に対する解軌道の概略図を yx 平面上に描け．

第3問

表の出る確率が p の硬貨を n 回続けて投げるとき，表が2回続けては現れない確率を a_n，表が3回続けては現れない確率を b_n とする．ただし，$a_1 = 1$，$b_1 = b_2 = 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) a_2 を p の関数として表せ．

(2) $n \geq 3$ のとき，a_n を p，a_{n-1}，a_{n-2} を用いて表せ．

(3) $p = \dfrac{2}{3}$ のとき，漸化式

$$a_n + \alpha a_{n-1} = \beta\left(a_{n-1} + \alpha a_{n-2}\right)$$

を満たす実数の組 (α, β) をすべて求めよ．

(4) $p = \dfrac{2}{3}$ のとき，a_n を n の関数として表せ．

(5) b_3 を p の関数として表せ．

(6) $n \geq 4$ のとき，b_n を p，b_{n-1}，b_{n-2}，b_{n-3} を用いて表せ．

(7) $p = \dfrac{3}{4}$ のとき，任意の正の整数 n に対して次式が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned} b_n \quad = \quad & \frac{9}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{(-1)^{n-1}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{n-1}\cos\left((n-1)\theta\right) \\ & -\frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{8}\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{2}\mathrm{i}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1-\sqrt{2}\mathrm{i}}{4}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

ただし，i は虚数単位とし，θ は $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ を満たす角とする．

Problem 1

A line on a two-dimensional plane can be expressed as $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, where (x, y) is a point on the line in the Cartesian coordinate system. We call the column vector $(\alpha, \beta, \gamma)^{\mathrm{T}}$ a coefficient vector of the line. Answer the following questions. Note that the coefficient vector in your answer must satisfy $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

(1) Find a coefficient vector of a line that passes through a point $\vec{a}$ and is perpendicular to a unit vector $\vec{v}$ on a two-dimensional plane.

(2) Let a line B pass through a point $\vec{b}$ and be perpendicular to a unit vector $\vec{n}$. Given a line A, let the line A$'$ be the mirror transformation of the line A over the line B. Using $\vec{b}$ and $\vec{n}$, write a three-dimensional square matrix that transforms a coefficient vector of the line A to a coefficient vector of the line A$'$.

(3) Find the determinant of the matrix derived in Question (2).

(4) Consider the movement of the line D_t whose coefficient vector changes with the real variable t as $(4t, 4t^2 - 1, t)^{\mathrm{T}}$. This line passes through a point regardless of t. Find the coordinate of that point.

(5) Suppose that, with the mirror transformation over a line M_t, which also changes with t, the line D_t in Question (4) is transformed to the line with a coefficient vector $(0, 1, -t)^{\mathrm{T}}$. Find the coefficient vector $(\alpha_t, \beta_t, \gamma_t)^{\mathrm{T}}$ of the line M_t, where $\alpha_t > 0$ and $\beta_t > 0$ for $t > 0$.

(6) When t changes from 0 to $+\infty$, consider the region where the line M_t in Question (5) can exist. Describe the region using a simple mathematical expression and draw a diagram of the region.

Problem 2

Let t be a real independent variable, and let $a(t)$, $x(t)$ and $y(t)$ be real-valued functions. Answer the following questions.

(1) Let $a(t)$ be a continuous and periodic function of t whose period is T. Find the initial-value-problem solution $x(t)$ of the ordinary differential equation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = a(t)x(t),$$

where $x(0) = x_0 \neq 0$.

(2) Find the necessary and sufficient condition on $a(t)$ such that the solution $x(t)$ in Question (1) is a periodic solution with a period T.

(3) Find the initial-value-problem solutions $x(t)$ and $y(t)$ of the simultaneous ordinary differential equations

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) &= -kx(t) + \sin(t)\cos(t)y(t), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) &= (-k + \sin(t))y(t), \end{aligned}$$

where k is a real constant, $x(0) = x_0 \neq 0$ and $y(0) = y_0 \neq 0$.

(4) Explain briefly how $x(t)$ and $y(t)$ converge as $t \to \infty$ when $k > 0$ in Question (3).

(5) Draw a schematic graph of the solution trajectory in Question (3) on the yx-plane where $k = 0$, $x_0 = 2$ and $y_0 = 1$.

Problem 3

A coin with the probability of coming up heads equal to p is tossed n times. Let a_n be the probability that the coin never comes up heads twice in a row, and let b_n be the probability that the coin never comes up heads three times in a row. Here, let $a_1 = 1$ and $b_1 = b_2 = 1$. Answer the following questions.

(1) Obtain a_2 as a function of p.

(2) When $n \geq 3$, describe a_n by using p, a_{n-1} and a_{n-2}.

(3) When $p = \frac{2}{3}$, obtain all the pairs (α, β) of real numbers that satisfy the following recursion:

$$a_n + \alpha a_{n-1} = \beta \left(a_{n-1} + \alpha a_{n-2} \right).$$

(4) When $p = \frac{2}{3}$, obtain a_n as a function of n.

(5) Obtain b_3 as a function of p.

(6) When $n \geq 4$, describe b_n by using p, b_{n-1}, b_{n-2} and b_{n-3}.

(7) When $p = \frac{3}{4}$, show that the following equation holds for any positive integer n:

$$\begin{aligned} b_n \quad = \quad & \frac{9}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \frac{(-1)^{n-1}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{n-1} \cos\left((n-1)\theta\right) \\ & - \frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{8}\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{2}\mathrm{i}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{-1-\sqrt{2}\mathrm{i}}{4}\right)^{n-1}\right\}, \end{aligned}$$

where i is the imaginary unit and θ is the angle that satisfies $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ and $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

(草稿用紙)

(草稿用紙)