2024 年度 / AY2024

大学院入学試験問題
Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数　学　2 / Mathematics 2

試験時間 / Examination Time:　14:25–15:15

注意事項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には和文および英文の第2問がある．日本語ないし英語で解答すること．
   This booklet contains Problem 2 both in Japanese and in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙1枚が渡される．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of the answer sheet with your examinee number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft sheets from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take either the answer sheet or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee number	No.

上欄に受験番号を記入すること．Fill the above box with your examinee number.

(草稿用紙)

第2問

正の実数 s に対して次の積分で定義される関数 $f(s)$ を考える．

$$f(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \exp(-t) \mathrm{d}t.$$

以下の問いに答えよ．なお，上式の積分が収束することは示さずに解答してよい．

(1) $f(1)$ の値を求めよ．

(2) 任意の正の実数 t および非負整数 n に対して不等式 $\exp(t) > \frac{t^n}{n!}$ が成り立つ．

(a) 正の実数 s に対して次の不等式を示せ．

$$\int_0^1 t^{s-1} \exp(-t) \mathrm{d}t < \frac{1}{s}.$$

(b) $n > s > 0$ のとき，$c > 1$ を満たす任意の実数 c に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\int_1^c t^{s-1} \exp(-t) \mathrm{d}t < \frac{n!}{n-s}.$$

(3) $f(s)$ の二階微分が

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(s)}{\mathrm{d}s^2} = \int_0^\infty g(t,s) \exp(-t) \mathrm{d}t$$

で表されるとき，関数 $g(t,s)$ を一つ求めよ．なお，微分と積分の順序を交換できることは示さずに解答してよい．

(4) 次式で定義される D の値を求めよ．

$$D = \int_0^\infty (\log t)^2 \exp(-t) \mathrm{d}t - \left(\int_0^\infty (\log t) \exp(-t) \mathrm{d}t \right)^2.$$

ただし，

$$\left. \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \log f(s) \right|_{s=1} = \frac{\pi^2}{6}$$

となることを用いてよい．

(5) 正の実数 r および α に対して関数 $p(r)$ を

$$p(r) = \frac{r}{\alpha} \exp\left(-\frac{r^2}{2\alpha} \right)$$

によって定める．次式で定義される S の値を求めよ．

$$S = \int_0^\infty (\log r)^2 p(r) \mathrm{d}r - \left(\int_0^\infty (\log r)\, p(r) \mathrm{d}r \right)^2.$$

Problem 2

Consider a function $f(s)$ defined by the following integral for positive real numbers s.

$$f(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \exp(-t) \mathrm{d}t.$$

Answer the following questions. You may answer without showing that the above integral converges.

(1) Find the value of $f(1)$.

(2) The inequality $\exp(t) > \frac{t^n}{n!}$ holds for any positive real number t and non-negative integer n.

(a) For positive real numbers s, show the following inequality.

$$\int_0^1 t^{s-1} \exp(-t) \mathrm{d}t < \frac{1}{s}.$$

(b) When $n > s > 0$, show that the following inequality holds for any real number c that satisfies $c > 1$.

$$\int_1^c t^{s-1} \exp(-t) \mathrm{d}t < \frac{n!}{n-s}.$$

(3) When the second-order derivative of $f(s)$ is expressed as

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(s)}{\mathrm{d}s^2} = \int_0^\infty g(t,s) \exp(-t) \mathrm{d}t,$$

find a function $g(t,s)$. You may answer without showing that the order of differentiation and integration can be exchanged.

(4) Find the value of D defined as

$$D = \int_0^\infty (\log t)^2 \exp(-t) \mathrm{d}t - \left(\int_0^\infty (\log t) \exp(-t) \mathrm{d}t \right)^2.$$

Here, you may use the fact that the following relation holds.

$$\left. \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \log f(s) \right|_{s=1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(5) Define a function $p(r)$ for positive real numbers r and α as

$$p(r) = \frac{r}{\alpha} \exp\left(-\frac{r^2}{2\alpha} \right).$$

Find the value of S defined as

$$S = \int_0^\infty (\log r)^2 p(r) \mathrm{d}r - \left(\int_0^\infty (\log r) p(r) \mathrm{d}r \right)^2.$$

(草稿用紙)

(草稿用紙)