

2022 年度 / 2022 School Year

大学院入学試験問題
Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数 学 1 / Mathematics 1

試験時間 / Examination Time: 13:00–13:50

注 意 事 項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第1問があり、日本語は1頁目、英文は2頁目である。日本語ないし英語で解答すること。
This booklet contains Problem 1 on page 1 in Japanese and page 2 in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙1枚が渡される。必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい。
You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
Do not separate the draft papers from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号、符号、文言などを記入した答案は無効とする。
Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。
Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.
--------------------------	-----

上欄に受験番号を記入すること。 Fill this box with your examinee's number.

(草稿用紙 / Draft)

第1問

以下の $x, y, z \in \mathbb{R}$ に関する複数の条件を考える.

$$\begin{cases} 0 < z - xy < 1 \\ 0 < z - (x + y)^2 < -xy \end{cases}$$

Ω を上記の条件を満たす z が一つでも存在するような点 (x, y) の集合とする. Ω は三次元デカルト座標系において上記の条件を満たすような点 (x, y, z) の集合を xy 平面上に正射影した図形とも解釈できる. 以下の問いに答えよ.

- (1) Ω を x と y に関する不等式で表現せよ.
- (2) 集合 Ω を xy 平面上に図示せよ. 図形の境界が x 軸, y 軸と交わる場合は, その交点の座標も明記せよ.
- (3) 集合 Ω の境界の湾曲した区間は, 単位円の複数の円弧をある線形変換行列 \mathbf{X} で変換した図形になっている. このような \mathbf{X} を一つ求めよ. ただし, 単位円上の点 $(1, 0)$ は, 湾曲した区間の最も曲率の高い点に変換されなければならない.
- (4) (3) で求めた \mathbf{X} の行列式を求めよ.
- (5) 集合 Ω の面積を求めよ. ただし, 図形を線形変換した場合の面積変化率は, その線形変換行列の行列式の絶対値に等しいことを用いてもよい.

Problem 1

Consider the following multiple conditions on $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 0 < z - xy < 1 \\ 0 < z - (x + y)^2 < -xy \end{cases}$$

Let Ω be the set of points (x, y) for which at least one z exists satisfying the above conditions. Note that the set Ω can be seen in the three-dimensional Cartesian coordinate system as the orthogonal projection of points (x, y, z) satisfying the above conditions onto the xy -plane. Answer the following questions.

- (1) Find the inequalities on x and y representing Ω .
- (2) Draw a figure of Ω in the xy -plane. If the boundary of Ω intersects with the x -axis or the y -axis, write down the coordinates at each intersection.
- (3) The curved segments of the boundary of Ω correspond to the linear transformation of arcs of the unit circle with a matrix \mathbf{X} . Find one such \mathbf{X} . Note that the point $(1, 0)$ on the unit circle must be transformed to a point where the curvature is maximized in the curved segments.
- (4) Calculate the determinant of \mathbf{X} found in (3).
- (5) Calculate the area of the set Ω . Note that the absolute value of the determinant of a matrix is the area scale factor of the transformation with that matrix.

(草稿用紙 / Draft)

(草稿用紙 / Draft)