2026 年 度 / AY2026

大 学 院 入 学 試 験 問 題
Graduate School
Entrance Examination Problem Booklet

数　　学 / Mathematics

試験時間 / Examination Time:　　13:00–15:30

注　意　事　項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
   Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
   If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第 1 問から第 3 問まであり，和文は 1 頁から 3 頁，英文は 4 頁から 6 頁である．全問を日本語ないし英語で解答すること．
   Three problems appear on pages 1–3 in Japanese and pages 4–6 in English in this booklet. Answer all of the three problems in Japanese or English.
4. 解答用紙 3 枚が渡される．1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
   You are given three answer sheets. You must use a separate answer sheet for each problem. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を記入すること．
   Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
   Do not separate the draft sheets from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
   Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
   Do not take the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee number	No.

上欄に受験番号を記入すること．Fill the above box with your examinee number.

(草稿用紙)

第 1 問

実正方行列に関する以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

で定める．

(i) A の固有値をすべて求めよ．また，それぞれの固有値に対して，それに対応する固有ベクトルを一つ求めよ．

(ii) 条件 $B^2 = A$ を満たす正定値実対称行列 B を一つ求めよ．

(2) C を正定値実対称行列とする．条件 $D^2 = C$ を満たす正定値実対称行列 D が一意に存在することを示せ．

(3) 実正方行列 F は正則であるとする．

(i) 条件 $F = SU = VT$ を満たす正定値実対称行列 S, T および直交行列 U, V がそれぞれ一意に存在することを示せ．

(ii) 問 (i) の S と T が条件 $T = F^{-1}SF$ を満たすことを示せ．

(iii) 問 (i) の U と V が条件 $U = V$ を満たすことを示せ．

第 2 問

x を実数の独立変数，$y(x)$ を実数値関数として，以下の常微分方程式を考える．ここで，a, b, c, d は実数の定数であり，$x + cy + d \neq 0$ とする．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ax + y + b}{x + cy + d} \tag{2.1}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $a = c = 0$ とする．この場合の式 (2.1) の一般解を求めよ．

(2) $ac = 1$ とする．この場合の式 (2.1) を適当な変数変換により変数分離形にせよ．

(3) $ac \neq 1$ とする．この場合の式 (2.1) を適当な変数変換により同次形にせよ．

次に，以下のような形式の常微分方程式を考える．ここで，$P(x), Q(x), R(x)$ は x のみに依存する実数値関数である．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 = 0 \tag{2.2}$$

(4) $R(x) = 0$ とする．この場合の式 (2.2) の一般解を求めよ．

(5) $P(x) = 0$ とする．この場合の式 (2.2) は，y についての適当な変数変換により問 (4) と同様の形式の常微分方程式へ変形できることを示せ．また，その常微分方程式の一般解を求めよ．

(6) 式 (2.2) の特殊解の一つを $y_1(x)$ とする．変数変換 $z = y - y_1$ により，式 (2.2) は問 (5) と同様の形式の常微分方程式へ変形できることを示せ．

(7) $P(x) = x^2 + x + 1,\ Q(x) = 2x + 1, R(x) = 1$ とする．この場合の式 (2.2) の一般解を求めよ．

第3問

数直線上を移動する点を考える．その動点の初期位置を 0 とする．動点は 1 ステップで，プラスまたはマイナス方向へ 1 移動する確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるとする．n を正の整数とし，n ステップ後の動点の位置を P_n とする．また動点の移動は独立と仮定する．

確率変数 X に対して，$E(X), V(X)$ をそれぞれ X の期待値と分散とし，$Pr(X \geq k)$, および $Pr(|X| \geq k)$ をそれぞれ $X \geq k$ を満たす確率，および $|X| \geq k$ を満たす確率とする．以下の問いに答えよ．

(1) P_n の期待値を求めよ．

(2) P_n の分散を求めよ．

(3) 任意の正の整数 k に対して, $|P_n| \geq k$ を満たす確率が以下を満たすことを示せ．

$$Pr(|P_n| \geq k) \leq \frac{V(P_n)}{k^2}$$

(4) 任意の $t > 0$ と任意の正の整数 k に対して, $P_n \geq k$ を満たす確率が以下を満たすことを示せ．

$$Pr(P_n \geq k) = Pr(\exp(tP_n) \geq \exp(tk)) \leq \frac{E(\exp(tP_n))}{\exp(tk)}$$

(5) 任意の $t > 0$ に対して, $\exp(tP_n)$ の期待値が以下を満たすことを示せ．

$$E(\exp(tP_n)) \leq \exp(\frac{t^2 n}{2})$$

(6) 任意の正の整数 k に対して, $P_n \geq k$ を満たす確率が以下を満たすことを示せ．

$$Pr(P_n \geq k) \leq \exp(\frac{-k^2}{2n})$$

(7) $n = 10^{10}$ ステップ終了後，$|P_n| \geq 10^6$ である確率は 10^{-4} 未満になることを示せ．

Problem 1

Answer the following questions on real square matrices.

(1) Let A be a matrix defined as

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

(i) Find all the eigenvalues of A. For each of these eigenvalues, find a corresponding eigenvector.

(ii) Find a real symmetric positive definite matrix B satisfying $B^2 = A$.

(2) Let C be a real symmetric positive definite matrix. Show that there exists a unique real symmetric positive definite matrix D satisfying $D^2 = C$.

(3) Let a real square matrix F be nonsingular.

(i) Show that there exist unique real symmetric positive definite matrices S and T and unique orthogonal matrices U and V satisfying $F = SU = VT$.

(ii) Show that S and T in Question (i) satisfy $T = F^{-1}SF$.

(iii) Show that U and V in Question (i) satisfy $U = V$.

Problem 2

Let x be a real independent variable. Let $y(x)$ be a real-valued function. Consider the following ordinary differential equation. Here, a, b, c and d are real-valued constants, and $x + cy + d \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ax + y + b}{x + cy + d}. \tag{2.1}$$

Answer the following questions.

(1) Assume that $a = c = 0$. Find the general solution of Equation (2.1) in this case.

(2) Assume that $ac = 1$. Convert Equation (2.1) in this case into a separable form with an appropriate change of variables.

(3) Assume that $ac \neq 1$. Convert Equation (2.1) in this case into a homogeneous form with an appropriate change of variables.

Next, consider an ordinary differential equation in the following form. Here, $P(x), Q(x)$ and $R(x)$ are real-valued functions that depend only on x.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 = 0. \tag{2.2}$$

(4) Assume that $R(x) = 0$. Find the general solution of Equation (2.2) in this case.

(5) Assume that $P(x) = 0$. Show that Equation (2.2) in this case can be converted into an ordinary differential equation in the same form as that in Question (4) by an appropriate change of variables with respect to y. Also, find the general solution of that ordinary differential equation.

(6) Let $y_1(x)$ denote a particular solution of Equation (2.2). Show that Equation (2.2) can be converted into an ordinary differential equation in the same form as that in Question (5) with the change of variables $z = y - y_1$.

(7) Assume that $P(x) = x^2 + x + 1$, $Q(x) = 2x + 1$ and $R(x) = 1$. Find the general solution of Equation (2.2) in this case.

Problem 3

Consider a moving point on a number line. The initial position of the moving point is 0. At each step, the moving point moves by 1, either in the positive or the negative direction, each with probability $\frac{1}{2}$. For a positive integer n, denote by P_n the position of the moving point in the line after n steps. It is assumed that the movements of the moving point are independent.

For a random variable X, let $E(X)$ and $V(X)$ be the expected value and variance of X, respectively. Let $Pr(X \geq k)$, and $Pr(|X| \geq k)$ be the probability of satisfying $X \geq k$ and $|X| \geq k$, respectively.

Answer the following questions.

(1) Find the expected value of P_n.

(2) Find the variance of P_n.

(3) Show that for any positive integer k, the probability of satisfying $|P_n| \geq k$ satisfies the following:

$$Pr(|P_n| \geq k) \leq \frac{V(P_n)}{k^2}.$$

(4) Show that for any $t > 0$ and any positive integer k, the probability of satisfying $P_n \geq k$ satisfies the following:

$$Pr(P_n \geq k) = Pr(\exp(tP_n) \geq \exp(tk)) \leq \frac{E(\exp(tP_n))}{\exp(tk)}.$$

(5) Show that for any $t > 0$, the expected value of $\exp(tP_n)$ satisfies the following:

$$E(\exp(tP_n)) \leq \exp(\frac{t^2 n}{2}).$$

(6) Show that for any positive integer k, the probability of satisfying $P_n \geq k$ satisfies the following:

$$Pr(P_n \geq k) \leq \exp(\frac{-k^2}{2n}).$$

(7) Show that the probability that $|P_n| \geq 10^6$ after $n = 10^{10}$ steps is less than 10^{-4}.

(草稿用紙)

(草稿用紙)