

2022 年度 / 2022 School Year

大学院入学試験問題  
Graduate School  
Entrance Examination Problem Booklet

数 学 3 / Mathematics 3

試験時間 / Examination Time: 15:50–16:40

注 意 事 項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。  
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。  
If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第3問があり、日本語は1頁目、英文は2頁目である。日本語ないし英語で解答すること。  
This booklet contains Problem 3 on page 1 in Japanese and page 2 in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙1枚が渡される。必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい。  
You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。  
Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。  
Do not separate the draft papers from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号、符号、文言などを記入した答案は無効とする。  
Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。  
Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.
--------------------------	-----

上欄に受験番号を記入すること。 Fill this box with your examinee's number.

(草稿用紙 / Draft)

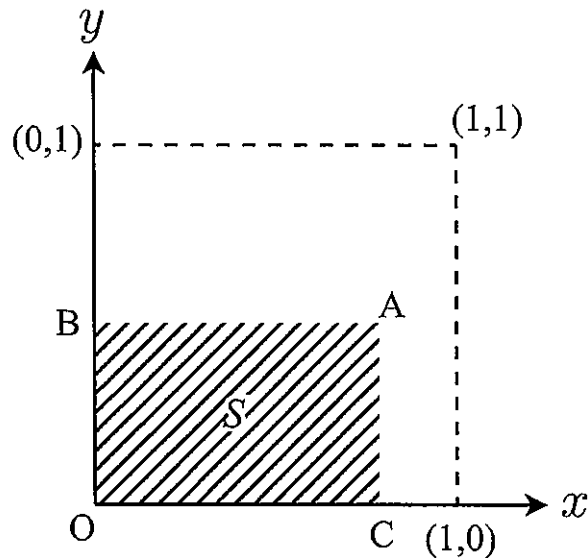
### 第3問

$xy$  平面上に、 $0 < x < 1$ かつ $0 < y < 1$ で定義される領域  $R$  を考える。  $R$  上にランダムに1点を選び、それを点  $A$  とする。ただし、点  $A$  は  $R$  上に一様に分布するとする。図に表すように、点  $A$  から  $y$  軸への垂線を  $AB$ 、点  $A$  から  $x$  軸への垂線を  $AC$  とする。原点を  $O$  としたとき、長方形  $OCAB$  を「点  $A$  の長方形」と呼ぶ。また、点  $A$  の長方形の面積を表す確率変数を  $S$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $S$  の期待値を求めよ。
- (2)  $S \leq r$  となる確率を求めよ。ただし  $0 < r < 1$  とする。
- (3)  $S$  の確率密度関数を求めよ。

再び、領域  $R$  を考える。  $n$  を正の整数とする。  $R$  上にランダムに  $n$  点を選び、それらを点  $A_1, A_2, \dots, A_n$  とする。ただし、各点は  $R$  上に一様に分布し、 $i \neq j$  である  $A_i$  と  $A_j$  は独立に選ばれるとする。次の問いに答えよ。

- (4) 点  $A_i$  の長方形の面積を表す確率変数を  $S_i$  とする。  $Z$  を  $S_1, S_2, \dots, S_n$  の最小値を表す確率変数とする。この時、 $Z$  の確率密度関数を求めよ。



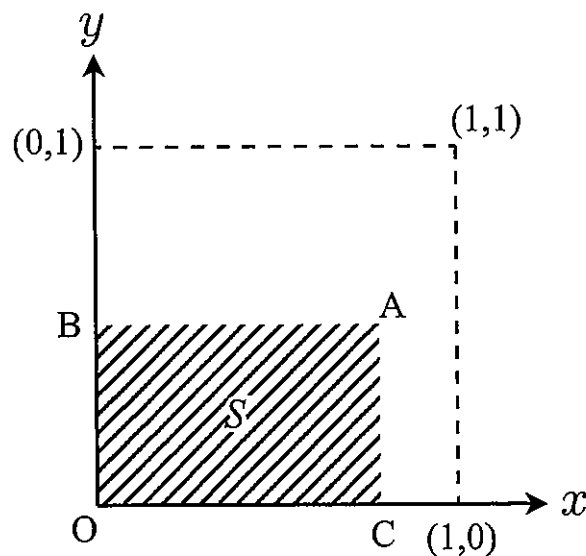
### Problem 3

Consider a region  $R$  defined by  $0 < x < 1$  and  $0 < y < 1$  in the  $xy$ -plane. We randomly select a point on  $R$  and refer to the selected point as  $A$ . We assume that  $A$  is uniformly distributed on  $R$ . Let  $AB$  be a perpendicular line from  $A$  to the  $y$ -axis and  $AC$  be a perpendicular line from  $A$  to the  $x$ -axis as shown in the figure. We call rectangle  $OCAB$  as “the rectangle of  $A$ ”, where  $O$  denotes the origin. Let  $S$  be a random variable representing the area of the rectangle of  $A$ . Answer the following questions.

- (1) Calculate the expectation value of  $S$ .
- (2) Calculate the probability that  $S \leq r$  holds, where  $0 < r < 1$ .
- (3) Calculate the probability density function of  $S$ .

Again consider the region  $R$ . Let  $n$  be a positive integer. We select  $n$  points on  $R$  and refer to the selected points as  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . We assume that each of the points is uniformly distributed on  $R$ , and  $A_i$  and  $A_j$  for  $i \neq j$  are selected independently. Answer the following question.

- (4) Let  $S_i$  be a random variable representing the area of the rectangle of  $A_i$ . Let  $Z$  be a random variable which is the minimum of  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Calculate the probability density function of  $Z$ .



(草稿用紙 / Draft)

(草稿用紙 / Draft)