

2023 年度 / AY2023

大学院入学試験問題

Graduate School  
Entrance Examination Problem Booklet

数 学 3 / Mathematics 3

試験時間 / Examination Time: 15:50–16:40

注意事項 / Instructions

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。  
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。  
If you find missing, misplaced, and/or unclearly printed pages in the problem booklet, ask the examiner.
3. 本冊子には第3問があり、和文は1頁目、英文は2頁目である。日本語ないし英語で解答すること。  
This booklet contains Problem 3 on page 1 in Japanese and page 2 in English. Answer the problem in Japanese or English.
4. 解答用紙1枚が渡される。必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい。  
You are given one answer sheet. You may use the back of the sheet if necessary.
5. 解答用紙上方の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を記入すること。  
Fill the designated blanks at the top of each answer sheet with your examinee's number and the problem number you are to answer.
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。  
Do not separate the draft papers from this problem booklet.
7. 解答に関係ない記号、符号、文言などを記入した答案は無効とする。  
Any answer sheet including marks, symbols and/or words unrelated to your answer will be invalid.
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。  
Do not take either the answer sheets or the problem booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.
--------------------------	-----

上欄に受験番号を記入すること。 Fill the above box with your examinee's number.

(草稿用紙)

### 第3問

丸石○と四角い石□をランダムに左から右に一直線上に一つずつ並べる。  $0 < q < 1$  として、丸石を確率  $1 - q$ 、四角い石を確率  $q$  で独立同一分布に従って並べていく。  $M$  を正の整数として、四角い石が  $M$  個連続して並べられた直後に並べることを停止する。  $M = 4$  の場合の列の例を以下に示す。

列1 ○□□□□

列2 □○□○□□□□

停止後の石の数を表す確率変数を  $L$  とする。上に示した列の場合、列1と列2はそれぞれ  $L = 5$ 、 $L = 9$  となる。

並べている途中の状態を考える。  $k$  を非負整数とし、右端から四角い石が  $k$  個連続している状態を  $C_k$  とする。例えば、 $M = 4$  の時に以下の列を考える。

列3 ○□□□○□□□

列4 □○□□○

$M = 4$  の場合を考えているため、列3と列4はまだ停止していない。列3は右端から四角い石が2個連続しているので状態  $C_2$  である。列4は右端に四角い石がないので状態  $C_0$  である。状態  $C_k$  から  $n$  個石を並べたときに初めて停止条件を満たす確率を  $a_{kn}$  とする。ここで  $n$  は非負整数である。  $a_{kn}$  に対して以下のような母関数  $A_k(t)$  を定義する。

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n a_{kn}$$

この時、以下の問いに答えよ。

- (1)  $M = 1$  の時、 $L$  の平均と分散を求めよ。
- (2)  $A_k(t)$  が満たす漸化式を求めよ。
- (3)  $A_k(t)$  を  $q$ 、 $M$ 、 $t$ 、 $k$  を用いて表せ。
- (4)  $L$  の平均を求めよ。

### Problem 3

Let us randomly place circle stones  $\circ$  and square stones  $\square$  one by one in a line from left to right. The circle and square stones are placed with probability  $1 - q$  and  $q$ , respectively, according to the independent and identical distribution, where  $0 < q < 1$ . The placement stops right after  $M$  square stones are placed in a row, where  $M$  is a positive integer. We show examples of the lines for  $M = 4$  as follows.

line 1  $\circ\square\square\square$

line 2  $\square\square\square\square\square\square\square$

Let  $L$  be a random variable which represents the number of the stones after stopping the placement. For the case of the lines shown above,  $L = 5$  and  $L = 9$  for lines 1 and 2, respectively.

Here, we consider intermediate states during the placement. Let  $k$  be a non-negative integer and let  $C_k$  be a state of a line where there are  $k$  square stones in a row from the right end. For instance, we consider the following lines for  $M = 4$ .

line 3  $\circ\square\square\square\square\square$

line 4  $\square\square\square\square$

Since we are considering the case of  $M = 4$ , lines 3 and 4 are not stopped yet. Line 3 is in state  $C_2$  since there are 2 square stones in a row from the right end. Line 4 is in state  $C_0$  since there is no square stone at the right end. Let  $a_{kn}$  be the probability that the stopping condition is met after placing  $n$  stones starting from state  $C_k$ , where  $n$  is a non-negative integer. We define the following generating function  $A_k(t)$  for  $a_{kn}$ .

$$A_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n a_{kn}$$

Answer the following questions.

- (1) Calculate the mean and variance of  $L$  for  $M = 1$ .
- (2) Obtain the recurrence relation that  $A_k(t)$  satisfies.
- (3) Obtain  $A_k(t)$  as a function of  $q$ ,  $M$ ,  $t$ , and  $k$ .
- (4) Calculate the mean of  $L$ .

(草稿用紙)

(草稿用紙)