数理情報学専攻 修士課程入学試験問題

Department of Mathematical Informatics

Graduate School Entrance Examination Problem Booklet

専門科目 数理情報学

Specialized Subject: Mathematical Informatics

2025年8月20日（水）　10:00 – 13:00

August 20, 2025 (Wednesday)　10:00 – 13:00

５問出題，３問解答 / Answer 3 out of the 5 problems

注　意　事　項 / Instructions

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
Do not open this booklet until the starting signal is given.

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
Notify the proctor if there are missing or incorrect pages in your booklet.

(3) 本冊子には第1問から第5問まであり，日本文は4頁から13頁，英文は14頁から23頁である．5問のうち3問を日本語ないし英語で解答すること．
Five problems appear on pages 4–13 in Japanese and pages 14–23 in English in this booklet. Answer 3 problems in Japanese or English.

(4) 答案用紙3枚が渡される．1問ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．
Three answer sheets will be given. Use one sheet per problem. If necessary, you may use the back of the sheet.

(5) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．
Fill in the examinee number and the problem number in the designated place of each answer sheet. Do not put your name.

(6) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
Do not separate a draft sheet from the booklet.

(7) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
Any answer sheet with marks or symbols unrelated to the answer will be invalid.

(8) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
Leave the answer sheets and this booklet in the examination room.

受験番号 Examinee number	No.

上欄に受験番号を記入すること．

Fill in your examinee number.

選択した問題番号 Problem numbers			

上欄に選択した３つの問題番号を記入すること．

Fill in the three selected problem numbers.

第1問

n を正の整数とする．$\mathbb{S}^n$ を n 次実対称行列全体の集合，$\mathbb{S}^n_+$ を n 次半正定値実対称行列全体の集合とする．行列 $A, B \in \mathbb{S}^n$ に対して，A の対角成分の和を $\mathrm{tr}(A)$ と表し，$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$，$\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$ と表記する．以下の設問に答えよ．

(1) 任意の $X, Y \in \mathbb{S}^n_+$ と任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して，$\alpha X + (1-\alpha)Y \in \mathbb{S}^n_+$ が成り立つことを示せ．

(2) 与えられた $A \in \mathbb{S}^n$ に対して，$\|X - A\|^2$ を最小にする $X \in \mathbb{S}^n_+$ が一意に定まることを示せ．また，その元を $\phi(A) \in \mathbb{S}^n_+$ と表記したとき，$\phi(A)$ を A の固有値と固有ベクトルを用いて表せ．

(3) 任意の $A \in \mathbb{S}^n$ と任意の $X \in \mathbb{S}^n_+$ に対して，

$$\langle A - \phi(A), X - \phi(A)\rangle \leq 0$$

が成り立つことを示せ．

(4) 任意の $X, Y \in \mathbb{S}^n_+$ に対して，以下の (i) と (ii) が同値であることを示せ．

(i) $\langle X, Y\rangle = 0$ が成り立つ．

(ii) $X = \phi(X - Y)$ が成り立つ．

第2問

実数全体の集合を$\mathbb{R}$とする．実数xに対して，$\exp(x) = \mathrm{e}^x$と表す．また，実数値確率変数Zの期待値を$\mathbb{E}[Z]$で表し，モーメント母関数M_Zを$M_Z(\lambda) = \mathbb{E}[\exp(\lambda Z)]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) 標準正規分布に従う確率変数Xに対して，$Y = X^2$と定める．このとき，任意の$\lambda < 1/2$に対して，

$$M_Y(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 任意の実数値確率変数Z, 正の実数ε, および$M_Z(\lambda)$が有限値となるような$\lambda > 0$に対して，

$$\Pr(Z \geq \varepsilon) \leq \frac{M_Z(\lambda)}{\exp(\lambda\varepsilon)}$$

が成り立つことを示せ．

以下では，mおよびnを正の整数とし，$m \times n$行列Aの各成分が独立に標準正規分布に従うことを仮定する．また，正の整数ℓに対して，$b \in \mathbb{R}^\ell$のユークリッドノルムを$\|b\|$で表す．

(3) $\|b\| = 1$を満たす任意の$b \in \mathbb{R}^n$と任意の$\varepsilon \in (0, m]$に対して，

$$\Pr(\|Ab\|^2 - m \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8m}\right)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$x \geq -1/2$に対して，$\log_{\mathrm{e}}(1+x) \geq x - x^2$が成り立つことを用いてもよい．

(4) kを2以上の整数として，$\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$とする．各$i = 1, \ldots, k$に対して，$b'_i = \frac{1}{\sqrt{m}} A b_i$とする．定数$\eta, \delta \in (0, 1]$に対して，

$$m \geq \frac{8}{\eta^2} \log_{\mathrm{e}}\left(\frac{k(k-1)}{2\delta}\right)$$

が成り立つとき，不等式

$$\|b'_i - b'_j\|^2 \leq (1+\eta)\|b_i - b_j\|^2$$

が全ての$i, j \in \{1, \ldots, k\}$で成り立つ確率は$1 - \delta$以上であることを示せ．

第3問

2つの実数値関数 $x(t), y(t)$ に関する次の微分方程式を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2xy, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2xy - y. \end{cases} \tag{$*$}$$

ただし，方程式 $(*)$ の初期条件 $(x(0), y(0))$ は与えられているものとし，解が存在する区間上で解は一意かつ十分滑らかであることは仮定してよい．以下の設問に答えよ．

(1) 条件

「全ての $t \geq 0$ で $(x(t), y(t)) = (x(0), y(0))$ が成立する」

を満たす $(x(0), y(0))$ を全て求めよ．

(2) 初期条件が $x(0) > 0, y(0) > 0, x(0) + y(0) = 1$ を満たすとする．このとき，任意の $t \geq 0$ に対して，方程式 $(*)$ の解は

$$x(t) \geq 0,\ y(t) \geq 0,\ x(t) + y(t) \leq 1$$

を満たすことを示せ．ただし，解は $t \geq 0$ で存在することを仮定してよい．

(3) 初期条件は (2) の初期条件と同一とする．このとき，方程式 $(*)$ には

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{t \to \infty} x(t) < 1$$

を満たす解が存在するか否かを議論せよ．

(4) 初期条件が $(x(0), y(0)) = (1, -1)$ を満たすとする．このとき，ある正の実数 T が存在して $\displaystyle\lim_{\substack{t \to T \\ t < T}} x(t) = \infty$ が成り立つ（t を T に左から近付けると $x(t)$ は無限大に発散する）ことを示せ．ただし，以下を用いてもよい．

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0 \text{ ならば } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \text{ が成り立つ．}$$

第 4 問

N を正の整数で $N \geq 2$ とする．個体数 N の集団の各個体が A と B の二つのタイプのいずれかであるとする．タイプ A とタイプ B に適応度と呼ばれる正の実数 f_{A} と f_{B} がそれぞれ与えられているとし，$r = f_{\mathrm{A}}/f_{\mathrm{B}}$ と定める．その集団において時刻 0 でのタイプ A の個体数 $X_0 \in \{0, \ldots, N\}$ が与えられたとする．$t = 0, 1, \ldots$ に対し，時刻 $t+1$ でのタイプ A の個体数 X_{t+1} は，時刻 t でのタイプ A の個体数 X_t を用いて以下で定まる．

- N 個の個体から等確率 $1/N$ で一個の個体が選択される．開区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う確率変数 u_t に対して，
  - 選ばれた個体がタイプ A かつ
    $$u_t > \frac{f_{\mathrm{A}} X_t}{f_{\mathrm{A}} X_t + f_{\mathrm{B}}(N - X_t)}$$
    が成り立つならば，その個体はタイプ B に変化する．
  - 選ばれた個体がタイプ B かつ
    $$u_t \leq \frac{f_{\mathrm{A}} X_t}{f_{\mathrm{A}} X_t + f_{\mathrm{B}}(N - X_t)}$$
    が成り立つならば，その個体はタイプ A に変化する．
  - それ以外の場合は選ばれた個体のタイプは変化しない．
- 選ばれなかった $N-1$ 個の個体のタイプは変化しない．
- 上記のタイプの推移後におけるタイプ A の個体数を X_{t+1} とする．

ここで，各時刻 $t = 0, 1, \ldots$ における個体の選択および $u_0, u_1, \ldots$ は独立であるとする．

$i = 1, \ldots, N-1$ に対して，$X_0 = i$ のとき，$p_i = \Pr(X_1 = i+1)$, $q_i = \Pr(X_1 = i-1)$ と定める．以下の設問に答えよ．

(1) $i = 1, \ldots, N-1$ に対して，$p_i/q_i = r$ が成り立つことを示せ．

(2) $i = 0, \ldots, N$ に対して，$X_0 = i$ のとき，

$$\phi_i = \Pr\left(\lim_{t \to \infty} X_t \text{ が存在して } N \text{ に等しい}\right)$$

と定義する．$i = 1, \ldots, N-1$ に対して，ϕ_{i+1}, ϕ_i, ϕ_{i-1} の間に成り立つ関係式を，p_i と q_i を用いて表せ．

(3) $i = 0, \ldots, N$ に対して，ϕ_i を i, N, r を用いて表せ．

(4) $i = 0, \ldots, N$ に対して，$X_0 = i$ からスタートした X_t が初めて 0 もしくは N になる時刻の期待値を T_i とする．そのような時刻 t が存在しない確率は 0 となる．このとき，$i = 1, \ldots, N-1$ に対して，T_{i+1}, T_i, T_{i-1} の間に成り立つ関係式を，p_i と q_i を用いて表せ．ただし，$i = 0, \ldots, N$ に対して，$T_i < \infty$ となることを用いてよい．

(5) $r = 1$ とする． $i = 1, \ldots, N-1$ に対して， T_i を i, N, L_N, L_{i+1}, L_{N-i+1} を用いて表せ．ただし， $L_1 = 0$ とし, $j \geq 2$ に対して，$L_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} 1/k$ とする．また，正の整数 n に対して，$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} L_j = nL_{n+1} - n$ が成り立つことを用いてもよい．

第 5 問

n 個の頂点の集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ と，m 本の辺の集合 E からなる単純無向グラフ $G = (V, E)$ が隣接リスト表現で与えられているとする．G の各辺に向きを付けて得られる有向グラフ $\vec{G} = (V, \vec{E})$ を G の向き付けと呼び，さらに $\vec{G} = (V, \vec{E})$ が非巡回的なとき非巡回向き付けと呼ぶ．各 $u \in V$ に対し，u を終点とする $\vec{G}$ 内の有向辺の本数を $d_{\vec{G}}(u)$ と表記する．数列 $(d_{\vec{G}}(v_1), d_{\vec{G}}(v_2), \dots, d_{\vec{G}}(v_n))$ を向き付け $\vec{G}$ の入次数列と呼ぶ．ただし，整数どうしの四則演算および比較演算は定数時間で行えるものと仮定してよい．以下の設問に答えよ．

(1) G の異なる二つの非巡回向き付けにおいて，対応する入次数列は異なることを示せ．

(2) 与えられた非負整数列 $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ に対して，

$$(d_{\vec{G}}(v_1), d_{\vec{G}}(v_2), \dots, d_{\vec{G}}(v_n)) = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

となる G の非巡回向き付け $\vec{G}$ の存在性を判定する線形時間アルゴリズムを設計せよ．

(3) $\max\{d_{\vec{G}}(v_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ が最小となるような非巡回向き付け $\vec{G}$ を求める線形時間アルゴリズムを設計せよ．

(4) 与えられた整数列 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ に対して，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i d_{\vec{G}}(v_i)$ を最大化する非巡回向き付け $\vec{G}$ を求める線形時間アルゴリズムを設計せよ．