数理情報学専攻 修士課程入学試験問題

Department of Mathematical Informatics

Graduate School Entrance Examination Problem Booklet

専門科目 数理情報学

Specialized Subject: Mathematical Informatics

2022年8月22日（月）　10:00 – 13:00

August 22, 2022 (Monday)　10:00 – 13:00

5問出題，3問解答 / Answer 3 out of the 5 problems

注　意　事　項 / Instructions

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
Do not open this booklet until the starting signal is given.

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
Notify the proctor if there are missing or incorrect pages in your booklet.

(3) 本冊子には第1問から第5問まであり，日本文は4頁から13頁，英文は14頁から23頁である．5問のうち3問を日本語ないし英語で解答すること．
Five problems appear on pages 4–13 in Japanese and pages 14–23 in English in this booklet. Answer 3 problems in Japanese or English.

(4) 答案用紙3枚が渡される．1問ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．
Three answer sheets will be given. Use one sheet per problem. If necessary, you may use the back of the sheet.

(5) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．
Fill in the examinee number and the problem number in the designated place of each answer sheet. Do not put your name.

(6) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
Do not separate a draft sheet from the booklet.

(7) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
Any answer sheet with marks or symbols unrelated to the answer will be invalid.

(8) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
Leave the answer sheets and this booklet in the examination room.

受験番号 Examinee number	No.

上欄に受験番号を記入すること．

Fill in your examinee number.

選択した問題番号 Problem numbers			

上欄に選択した3つの問題番号を記入すること．

Fill in the three selected problem numbers.

第１問

正の整数 m, n および有限実数列 $A = \{a_i\}_{i=1}^{m}, B = \{b_j\}_{j=1}^{n}$ に対して，

$$f(A,B) = \ln\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{-|a_i-b_j|}}\right)$$

と定義する．ただし，ln は自然対数を表す．以下の設問に答えよ．

(1) $f(A,B) \geq 0$ が成り立つことを示せ．また，$f(A,B) = 0$ となる A, B の必要十分条件を求めよ．

(2) 任意の空でない有限実数列 A, B, C に対して，

$$f(A,C) \leq f(A,B) + f(B,C)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 任意の実数 s に対して，$A_m(s) = \left\{s + \frac{i}{m}\right\}_{i=1}^{m}, B_n = \left\{\frac{j}{n}\right\}_{j=1}^{n}$ とおき，$g(s)$ を

$$g(s) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f(A_m(s), B_n)$$

で定める．このとき，

$$g(s) = \ln\left(\int_{s}^{1+s}\frac{1}{h(z)}\mathrm{d}z\right)$$

となるような関数 $h(z)$ の具体的な表式を導出せよ．

(4) $g(s)$ が最小となる実数 s を求めよ．

第 2 問

n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトル u の第 i 成分を u_i と表す．すべての $i = 1,\dots,n$ に対して $u_i > 0$ である $u \in \mathbb{R}^n$ を正値であるといい，正値ベクトル全体の集合を $\mathcal{X}_n$ で表す．また，ベクトル $a \in \mathbb{R}^n$ に対し，(i,i) 成分が a_i $(i = 1,\dots,n)$ であるような対角行列を $\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)$ で表す．行列 M の転置を $M^\top$ で表わす．

正則な $n\times n$ 実行列 $A = (a_{ij})$，ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ に対し，$x \in \mathcal{X}_n$ の関数 $F_i(x)$ を

$$F_i(x) = x_i\left(v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j\right) \qquad (i = 1,\dots,n)$$

と定める．ここで，$F_i(x^*) = 0$ $(i = 1,\dots,n)$ を満たす $x^* \in \mathcal{X}_n$ が存在するとする．そして，$x(t) \in \mathcal{X}_n$ についての微分方程式系

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = F_i(x(t)) \qquad (t \geq 0,\ i = 1,\dots,n) \tag{$*$}$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) ベクトル $c \in \mathcal{X}_n$ に対し，$x \in \mathcal{X}_n$ の関数 $L(x)$ を

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\left[x_i^*\log\frac{x_i^*}{x_i} - x_i^* + x_i\right]$$

とする．$x(0) = x' \in \mathcal{X}_n$ を初期値とする方程式 $(*)$ の解 $x(t)$ に対し，$\dot{L}(x')$ を $\dot{L}(x') = \left.\dfrac{\mathrm{d}L(x(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ と定める．また，行列 C を $C = \mathrm{diag}(c_1,\dots,c_n)$ と定める．対称行列 $CA + A^\top C$ が負定値となるとき，かつそのときに限り，任意の $x' \in \mathcal{X}_n\backslash\{x^*\}$ に対して $\dot{L}(x') < 0$ となることを示せ．

(2) ベクトル $w \in \mathcal{X}_n$ に対し，$z \in \mathbb{R}^n$ の関数 $H_w(z)$ を

$$H_w(z) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i\,z_i^2$$

とし，$H_w(z)$ の z における勾配を $\nabla H_w(z) = \left(\frac{\partial H_w}{\partial z_1}(z),\dots,\frac{\partial H_w}{\partial z_n}(z)\right)^\top$ と表す．方程式 $(*)$ の解 $x(t)$ に対して，$z(t) = x(t) - x^*$ が

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = G(z(t))\,\nabla H_w(z(t))$$

を満たすような行列値関数 $G(z)$ を求めよ．ただし，関数 $G(z)$ は，A, $W = \mathrm{diag}(w_1,\dots,w_n)$, $X^* = \mathrm{diag}(x_1^*,\dots,x_n^*)$, $Z = \mathrm{diag}(z_1,\dots,z_n)$ を用いて表すこと．

(3) 対角行列 $C = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ に対し，対称行列 $CA + A^\top C$ が負定値となる $c \in \mathcal{X}_n$ が存在するとする．このとき，次のことが成り立つようなベクトル $w \in \mathcal{X}_n$ を一つ求めよ．

「$z(t) \in U \setminus \{0\}$ ならば $\dfrac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t} < 0$ となる，$0 \in \mathbb{R}^n$ の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^n$ が存在する．」

第 3 問

複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表し，虚数単位を i と書く．実数 $r > 1$ に対し，D_r を複素数平面上の円板領域 $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ とする．D_r 上の正則関数 $f : D_r \to \mathbb{C}$ に対し，一様ノルム $\|f\|$ を $\|f\| = \sup_{z \in D_r} |f(z)|$ で定め，$I(f)$ と $I_N(f)$ をそれぞれ

$$I(f) = \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta, \qquad I_N(f) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/N})$$

と定める．ここで，N は正の整数とする．以下の設問に答えよ．

(1) 実数 $R > 0$ に対し，$\Gamma(R) \subset \mathbb{C}$ を，正（反時計回り）に向き付けられた，中心 0，半径 R の円周とする．このとき，D_r 上の正則関数 $f : D_r \to \mathbb{C}$ に対して

$$I(f) = \oint_{\Gamma(1)} \frac{-\mathrm{i}}{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

が成り立つことを示せ．

(2) D_r 上の正則関数 $f : D_r \to \mathbb{C}$ に対し，

$$g_N[f](z) = \frac{-\mathrm{i}\, z^{N-1}}{z^N - 1} f(z)$$

とおく．D_r 上の $g_N[f]$ の極を全て求め，それぞれの極における $g_N[f]$ の留数を求めよ．

(3) D_r 上の正則関数 $f : D_r \to \mathbb{C}$ が $\|f\| < \infty$ を満たすとする．このとき

$$|I(f) - I_N(f)| \le \frac{2\pi \|f\|}{r^N - 1} \tag{$*$}$$

が成り立つことを示せ．

(4) 式 $(*)$ の右辺の定数 2π が最良であること，すなわち，

$$\limsup_{N \to \infty} \left(r^N \sup_f \frac{|I(f) - I_N(f)|}{\|f\|} \right) = 2\pi$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\sup_f$ は，$\|f\| < \infty$ であるような D_r 上の正則関数 $f : D_r \to \mathbb{C}$ 全体にわたる上限を表す．

第 4 問

確率変数 X が平均 0, 分散 1 の正規分布に従うとし，確率変数

$$Y = \frac{1}{X^2}$$

が従う分布の確率密度関数を $f(y)$ と定める．虚数単位を i とし，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とする．また，確率変数 Z の期待値を $\mathbb{E}[Z]$ で表す．以下の設問に答えよ．

(1) $f(y)$ を求めよ．

(2) $f(y)$ のラプラス変換を $L(u) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-uy} f(y) \mathrm{d}y$ $(u \geq 0)$ と表す．このとき，

$$\frac{\mathrm{d}L(u)}{\mathrm{d}u} = -\frac{1}{\sqrt{2u}} L(u) \quad (u > 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) Y の特性関数を $\varphi(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uY}]$ $(u \in \mathbb{R})$ と表す．このとき，$\varphi(u)$ を求めよ．

(4) 確率変数 $Y_1, \ldots, Y_n$ が独立同一に確率密度関数 $f(y)$ をもつ確率分布に従うとする．このとき，

$$\frac{1}{n^2}(Y_1 + \cdots + Y_n)$$

が $n \to \infty$ の極限で分布収束（法則収束）することを示し，その極限分布の確率密度関数を求めよ．

第 5 問

自然数（正の整数）d に対して，

$$d = \sum_{i=0}^{n} d_i 2^i, \quad d_i \in \{-1, 0, 1\} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \quad d_n = 1$$

を満たす整数の列 $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ を d の三値表現と呼ぶ．また，d の三値表現 $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ で，$1 \leq i \leq n$ の範囲の各整数 i に対して，

$$d_{i-1} d_i = 0$$

が成立するものを d の疎な三値表現と呼ぶ．以下の設問に答えよ．

(1) 自然数 n に対し，疎な三値表現 $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ で表現可能な自然数の最大値 L_n を求めよ．

(2) 任意の自然数 d に対し，d の疎な三値表現は一意的に定まることを示せ．

(3) 自然数 d の二進表現を疎な三値表現へ変換する $\mathrm{O}(\log d)$ 時間アルゴリズムを設計せよ．

(4) 整数の列 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ に対して，零でない整数 a_i の個数を $w(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ と表す．自然数 d の疎な三値表現 $(d_0^*, d_1^*, \ldots, d_m^*)$ と任意の三値表現 $(d_0, d_1, \ldots, d_n)$ に対し，

$$w(d_0^*, d_1^*, \ldots, d_m^*) \leq w(d_0, d_1, \ldots, d_n)$$

が成り立つことを示せ．

(5) 自然数 n に対し，X_n を集合 $\{z \in \mathbb{N} \mid z \leq L_n\}$ 上の離散一様分布に従う確率変数とする．X_n の疎な三値表現 $(d_0^*, d_1^*, \ldots, d_m^*)$ を用いて，確率変数 Y_n を $Y_n = w(d_0^*, d_1^*, \ldots, d_m^*)$ で定める．このとき，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n]}{n} = \frac{1}{3}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合，$\mathbb{E}[Y_n]$ は Y_n の期待値とする．