数理情報学専攻 修士課程入学試験問題

Department of Mathematical Informatics

Graduate School Entrance Examination Problem Booklet

専門科目 数理情報学

Specialized Subject: Mathematical Informatics

2019年8月20日（火）　10:00 – 13:00

August 20, 2019 (Tuesday)　10:00 – 13:00

5問出題，3問解答 / Answer 3 out of the 5 problems

注　意　事　項 / Instructions

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
Do not open this booklet until the starting signal is given.

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
Notify the proctor if there are missing or incorrect pages in your booklet.

(3) 本冊子には第1問から第5問まであり，日本文は4頁から13頁，英文は14頁から23頁である．5問のうち3問を日本語ないし英語で解答すること．
Five problems appear on pages 4–13 in Japanese and pages 14–23 in English in this booklet. Answer 3 problems in Japanese or English.

(4) 答案用紙3枚が渡される．1問ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．
Three answer sheets will be given. Use one sheet per problem. If necessary, you may use the back of the sheet.

(5) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．
Fill in the examinee number and the problem number in the designated place of each answer sheet. Do not put your name.

(6) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
Do not separate a draft sheet from the booklet.

(7) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
Any answer sheet with marks or symbols unrelated to the answer will be invalid.

(8) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
Leave the answer sheets and this booklet in the examination room.

受験番号 Examinee number	No.

上欄に受験番号を記入すること．

Fill in your examinee number.

選択した問題番号 Problem numbers			

上欄に選択した3つの問題番号を記入すること．

Fill in the three selected problem numbers.

第 1 問

n を正の整数とし，A は n 次の実正方行列，B は n 次の正定値実対称行列であるとする．以下の設問に答えよ．

(1) 条件

$$BC + CB = A$$

を満たす n 次の実正方行列 C がただ一つ存在することを示せ．以降では，この行列 C を $C_{A,B}$ で表す．

(2) $BC_{A,B} = C_{A,B}B$ と $AB = BA$ が同値であることを示せ．

第2問

ある生物の生存時間は平均 μ の指数分布に従う．この生物 n 匹の生存時間を観測することで μ を推定したい．ただし実験上の制約により，生まれた直後の一定期間 $[0,a]$ は観測ができず，もしこの期間内に生物が死んだ場合には，死んだ事実だけが観測されるものとする．a は正の定数である．

$i=1,\ldots,n$ に対し，第 i 番目の個体の生存時間を X_i とおく．これらは平均 μ の指数分布に従い，互いに独立とする．平均 μ の指数分布の確率密度関数は $f(x;\mu)=(1/\mu)\mathrm{e}^{-x/\mu}$ $(x>0)$ である．また観測値 Y_i を

$$Y_i=\begin{cases} a & (X_i\le a \text{ のとき}),\\ X_i & (X_i>a \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．

以下の問いに答えよ．

(1) Y_1 の期待値を $g(\mu)$ とおく．$g(\mu)$ を求めよ．

(2) $\bar{Y}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}Y_i$ とおく．$\bar{Y}>a$ のとき，$g(\hat{\mu})=\bar{Y}$ を満たす $\hat{\mu}$ がただ一つ存在することを示せ．

(3) $Y_i=a$ を満たす i の個数を M とおく．$0\le m\le n-1$ および $b>a$ に対して

$$\mathrm{P}(M=m,\bar{Y}\le b)=\int_a^b h(m,y;\mu)\mathrm{d}y,$$

を満たす関数 $h(m,y;\mu)$ を求めよ．

(4) $m<n$ かつ $y>a$ のとき，$h(m,y;\mu)$ を最大にする μ がただ一つ存在することを示せ．

第 3 問

K を体，n を正整数とする．$K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を K 上の n 変数の有理関数のなす体とし，K および $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$ で生成される $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の部分環 $K[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}]$ を L で表す．また $R = K[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n]$ を K 上の $2n$ 変数多項式環とする．以下の設問に答えよ．

(1) 元 $p \in R$ において，各変数 y_i $(i = 1, \ldots, n)$ に x_i^{-1} を代入して得られる L の元を $\varphi(p)$ で表す．この写像 $\varphi\colon R \to L$ は環の準同型である．J を L のイデアルとするとき，$\varphi^{-1}(J)$ は R のイデアルであることを示せ．

(2) $1 \leq i \leq n$ について $g_i = x_i y_i - 1$ と定める．また，

$$R' = \left\{ r \in R \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \text{ とするとき，} r \text{ 内のどの単項式についても，} \\ x_i \text{ と } y_i \text{ がともに現れることはない} \end{array} \right\}$$

と定める．任意の元 $p \in R$ に対して，$p = h_1 g_1 + \cdots + h_n g_n + r$ となる R の元 $h_1, \ldots, h_n$ と R' の元 r が存在することを示せ．

(3) $g_1, \ldots, g_n$ で生成される R のイデアルを I で表す．$\ker \varphi = I$ を示し，L が剰余環 R/I と同型であることを示せ．

第4問

整数 n と実数 $t \geq 0$ に対する関数 $x(n,t)$ がしたがう微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}x(n,t) = x(n-1,t) + x(n+1,t) - 2\,x(n,t) \tag{$*$}$$

を考える．ただし，関数 $x(n,t)$ は任意の整数 n に対して

$$x(n+N,t) = x(n,t) \tag{$**$}$$

を満たすものとする．ここで N は3以上の整数とする．また，整数 m,n に対し $e(m,n) = \exp\left(\mathrm{i}\dfrac{2\pi mn}{N}\right)$ と定める．ここで i は虚数単位である．以下の設問に答えよ．

(1) 整数 m に対し $f_m(t)$ を実数 $t \geq 0$ の関数とし，$f_m(0) = c_m$ とする．ここで c_m は複素数である．$x(n,t) = e(m,n)\,f_m(t)$ の形の関数が微分方程式 $(*)$ と条件 $(**)$ を満たすとき，$f_m(t)$ を求めよ．

(2) $(g_0, \ldots, g_{N-1})$ を N 次元複素ベクトルとする．初期条件 $x(n,0) = g_n \quad (n = 0,1,\ldots,N-1)$ のもとで，微分方程式 $(*)$ の解を条件 $(**)$ のもとで求めよ．

(3) (2) で求めた解 $x(n,t)$ に対して，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(n,t)$ を求めよ．

第5問

各要素が有理数の配列を考える．配列 A の第 i 番目の要素を $A[i]$ で表す．長さ n の配列 A に対し，

$$\sum_{i=1}^{n}(A[i]-B[i])^2$$

を最小にする長さ n の単調非減少配列 B を，A の近似配列と定義する．ただし，B が単調非減少とは，$B[1] \leq B[2] \leq \cdots \leq B[n]$ を満たすこととする．以下の設問に答えよ．

(1) 長さ n の配列 A の末尾に要素を 1 つ追加した配列を A' とする．つまり $A'[i] = A[i]$ $(1 \leq i \leq n)$ が成り立つ．また，B, B' をそれぞれ A, A' の近似配列とする．

(1-1) $A'[n+1] \geq B[n]$ ならば，$B'[i] = B[i]$ $(1 \leq i \leq n)$ かつ $B'[n+1] = A'[n+1]$ であることを示せ．

(1-2) $B[1] = B[2] = \cdots = B[n]$ かつ $A'[n+1] < B[n]$ とする．このとき $B'[1] = B'[2] = \cdots = B'[n+1]$ かつ $B'[n+1] < B[n]$ であることを示し，$B'[n+1]$ を求めよ．

(2) 配列 A の近似配列を求める多項式時間アルゴリズムを与えよ．ただし，有理数どうしの四則演算は定数時間で行えるものと仮定してよい．