数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成２９年８月２２日（火）　１０：００〜１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 答案用紙３枚が渡される．１問ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

選択した問題番号			

上欄に選択した３つの問題番号を記入すること．

第１問

$\mathbb{C}$を複素数体とし，Aを$\mathbb{C}$上のn次正方行列とする．Aの不変部分空間とは，$\mathbb{C}^n$の部分ベクトル空間Uであって，$AU \subseteq U$となるものである．$\mathcal{S}_A$をAのすべての不変部分空間からなる集合とする．$\mathcal{S}_A$上の半順序$\preceq$を包含関係$\subseteq$により定め，$\mathcal{S}_A$を半順序集合とみなす．

以下の設問に答えよ．束やハッセ図については下の注意も参考にせよ．

(1)(1-1) $\mathcal{S}_A$は束になることを示せ．

(1-2) 正則行列Pに対して$\mathcal{S}_A$と$\mathcal{S}_{P^{-1}AP}$は半順序集合として同型であることを示せ．

(1-3) 複素数αに対して，$\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{A+\alpha\mathrm{I}}$を示せ．ただし，$\mathrm{I}$は単位行列である．

(2) Aが以下の行列であるときの$\mathcal{S}_A$のハッセ図をそれぞれ図示せよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\mathcal{S}_A$の要素数が有限となる行列Aはどのようなもので，そのときの$\mathcal{S}_A$のハッセ図はどのような形をしているか説明せよ．

（注意）$\preceq$を半順序とする半順序集合$\mathcal{L}$が束であるとは，任意の$x, y \in \mathcal{L}$に対して以下の二つの性質が成り立つときをいう：

- 集合$\{u \in \mathcal{L} \mid x \succeq u \preceq y\}$に極大元がただ一つ存在する．
- 集合$\{u \in \mathcal{L} \mid x \preceq u \succeq y\}$に極小元がただ一つ存在する．

また，$\mathcal{L}$のハッセ図とは，$\mathcal{L}$の要素を頂点とし，以下の性質を満たすすべての異なる要素$x, y \in \mathcal{L}$にxからyへ枝を引いて得られる有向グラフである：

- $x \preceq y$かつ$\{z \in \mathcal{L} \mid x \preceq z \preceq y\} = \{x, y\}$.

第２問

$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とし，$\mathbb{R}$ 上の二つの確率分布 P_1, P_2 を考える．P_1, P_2 それぞれに確率密度関数 $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在し $0 < p_1(x)/p_2(x) < \infty$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ を満たすとき，P_1 の P_2 に対する Kullback-Leibler ダイバージェンスは以下のように定義される：

$$D(P_1||P_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \log\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) \mathrm{d}x.$$

平均 $\mu \in \mathbb{R}$，分散 $\sigma^2 > 0$ の正規分布を $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ で表す．確率変数 Z の期待値を $\mathrm{E}[Z]$ で表す．累積分布関数 Ψ に対して，関数 $\Psi^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ を $\Psi^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \Psi(x) > t\}$ と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) P_1 と P_2 がそれぞれ $\mathrm{N}(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ および $\mathrm{N}(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ であるとき，$D(P_1||P_2)$ を求めよ．

(2) 二つの確率変数 X と Y を考え，それらの周辺分布が P_1, P_2 であるとする．今，X, Y は有限な二次モーメントを持ち，かつ $P_1(X \geq 0) = P_2(Y \geq 0) = 1$ とする．

(2-1) X, Y の同時確率分布を P_{XY} とするとき，以下の等式を示せ．

$$\mathrm{E}[X \cdot Y] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P_{XY}(\{X \geq x\} \cap \{Y \geq y\}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2-2) 確率分布 P_1, P_2 の累積分布関数を F, G とする．U を開区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数とするとき，

$$\mathrm{E}[(X-Y)^2] \geq \mathrm{E}[(F^{-1}(U) - G^{-1}(U))^2]$$

が成り立つことを示せ．

(3) P_1, P_2 の累積分布関数 F, G と開区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数 U を用いて，P_1, P_2 間の距離 $W(P_1, P_2)$ を

$$W(P_1, P_2) = \sqrt{\mathrm{E}[(F^{-1}(U) - G^{-1}(U))^2]}$$

と定義する．P_1 と P_2 がそれぞれ $\mathrm{N}(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ および $\mathrm{N}(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ であるとき，

$$W(P_1, P_2)^2 = (\mu_1 - \mu_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

となることを示せ．また，このとき

$$W(P_1, P_2)^2 \leq 2{\sigma_2}^2 D(P_1||P_2)$$

が成り立つことを示し，等号成立の必要十分条件を導出せよ．

第3問

n を正の整数とする．$\mathbb{R}$ を実数体とする．正方行列 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して，対角成分の和を $\mathrm{tr}(M)$ と書き，転置行列を $M^\top$ と表す．正方行列 $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対し，$\langle M, N\rangle := \mathrm{tr}(M^\top N)$ と定義する．また球面 $\mathbb{S}^2$ を $\mathbb{S}^2 := \{(\xi,\eta,\zeta)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1\}$ と定義する．

行列 $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対し，点 $p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{S}^2$ を変数とする最適化問題

$$\begin{array}{lll} \text{(P1)} & \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_i^\top p_j \\ & \text{subject to} & p_i \in \mathbb{S}^2 \quad (i = 1,\ldots,n) \end{array}$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を変数とする最適化問題

$$\begin{array}{lll} \text{(P2)} & \text{Maximize} & \langle C, X\rangle \\ & \text{subject to} & X \text{ の各対角成分の値は } 1, \\ & & X \text{ は半正定値対称行列} \end{array}$$

の最適値が (P1) の最適値以上であることを示せ．

次に巡回置換 $(1,2,\ldots,n)$ に対する置換行列 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を考える．すなわち

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (j - i \equiv 1 \bmod n \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

すると，任意の行列 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対し，

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^{-k} X A^k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \langle A^\ell, X\rangle A^\ell$$

が成立する．

以下では，C が $d_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0,\ldots,n-1)$ を用いて $C = \sum_{k=0}^{n-1} d_k A^k$ と表される場合を考える．

(2) X が (P2) の最適解のとき，$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^{-k} X A^k$ も (P2) の最適解であることを示し，(P2) の最適値が $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ と $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を変数とする最適化問題

$$\begin{array}{lll} \text{(P3)} & \text{Maximize} & \langle C, Y\rangle \\ & \text{subject to} & Y = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k A^k, \\ & & Y \text{ の各対角成分の値は } 1, \\ & & Y \text{ は半正定値対称行列} \end{array}$$

の最適値に一致することを示せ．

(3) (P2) の最適値が $y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ を変数とする線形計画問題

$$
\begin{aligned}
\text{(P4)} \quad & \text{Maximize} \quad && nd_0 + \sum_{i=1}^{n-1} nd_i y_i \\
& \text{subject to} \quad && \sum_{i=1}^{n-1} y_i \cos\frac{2\pi ij}{n} \geq -1 \quad && (j = 0, \ldots, n-1), \\
& && y_j = y_{n-j} && (j = 1, \ldots, n-1)
\end{aligned}
$$

の最適値に一致することを示せ.

(4) $n = 4, (d_0, d_1, d_2, d_3) = (0, 3, -4, 3)$ の場合に対して，(P1) の最適値と最適解を一つ求めよ.

第４問

$\mathbb{R}$ を実数体とし，関数 θ_1，$\theta_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に関する次の微分方程式を考える：

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta_1(t)}{\mathrm{d}t} = f(\theta_1(t), \theta_2(t)) := K\sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - \sin(\theta_1(t)), \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta_2(t)}{\mathrm{d}t} = g(\theta_1(t), \theta_2(t)) := K\sin(\theta_2(t) - \theta_1(t)) - \sin(\theta_2(t)). \end{cases}$$

ただし，$K > \frac{1}{2}$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 微分方程式 $(*)$ の定常解 $(\theta_1(t), \theta_2(t)) = (\theta_1^*, \theta_2^*)$ （ただし θ_1^*, θ_2^* は t によらない定数）を $0 \leq \theta_1^* < 2\pi$, $0 \leq \theta_2^* < 2\pi$ の範囲ですべて求めよ．

(2) 行列 J を

$$J(\theta_1, \theta_2) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial f(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial g(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial g(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}$$

と定義する．定常解 $(\theta_1(t), \theta_2(t)) = (\theta_1^*, \theta_2^*)$ は，$J(\theta_1^*, \theta_2^*)$ のすべての固有値の実部が負であるとき安定であるという．(1) で求めた定常解のうち，K に依存する解が安定であるかどうか判定せよ．

(3) 関数 $V(\theta_1, \theta_2)$ が存在して

$$f(\theta_1, \theta_2) = -\frac{\partial V(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1},\ g(\theta_1, \theta_2) = -\frac{\partial V(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}$$

と表わせることを示せ．

(4) 微分方程式 $(*)$ には周期解が存在しないことを示せ．ただし，周期解とは，$\boldsymbol{\theta}(t) := (\theta_1(t), \theta_2(t))$ とするとき，ある $T > 0$ が存在して，$\boldsymbol{\theta}(t+T) = \boldsymbol{\theta}(t)$ かつ，$0 < s < T$ となる任意の s について $\boldsymbol{\theta}(t+s) \neq \boldsymbol{\theta}(t)$ を満たす解 $\boldsymbol{\theta}(t)$ のことである．

第 5 問

m, n を $m > n \geq 1$ を満たす自然数とし，その最大公約数を $\gcd(m, n)$ とする．$\mathbb{Z}$ を整数環とする．以下の設問に答えよ．

(1) $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ は，$\gcd(m, n)$ を生成元とする $\mathbb{Z}$ の単項イデアルとなることを示せ．

(2) m を n で割った余りを r とするとき，$\gcd(m, n) = \gcd(n, r)$ を示せ．

(3) 自然数 m, n $(m > n \geq 1)$ を入力として，$mx + ny = \gcd(m, n)$ を満たす整数 x, y を，$O(\log m)$ 回の $\mathbb{Z}$ の演算で求めるアルゴリズムを与えよ．ここで，$\mathbb{Z}$ の演算とは，与えられた 2 個の整数に対して，加算，減算，乗算，商と余りを求める演算とする．

(4) 自然数 p が素数となる必要十分条件は，剰余環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が体であることを示せ．

(5) 素数 2017 に対して，乗法群 $(\mathbb{Z}/2017\mathbb{Z})^*$ における 822 の逆元を求めよ．