数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成２８年８月２３日（火）　１０：００～１３：００

５問出題，３問解答

注 意 事 項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 答案用紙３枚が渡される．１問ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(4) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．

(5) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(6) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(7) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

選択した問題番号			

上欄に選択した３つの問題番号を記入すること．

第1問

写像 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $F(x)=a^x$ で定義する．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合，x は実変数，a は正の実定数，a^x は a の x 乗である．$F(x)$ の導関数を $f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$ で表わす．$F(\bar{x})=\bar{x}$ かつ $|f(\bar{x})|<1$ を満たす $\bar{x}$ を，写像 F の安定な不動点と呼ぶ．以下の設問に答えよ．

(1) $\bar{x}$ が写像 F の安定な不動点である時，$\bar{x}$ を含む開区間 J が存在して，$x\in J$ ならば $\lim_{n\to\infty}F^n(x)=\bar{x}$ となることを示せ．ただし，$F^0(x)=x$，自然数 n に対して $F^n(x)=F(F^{n-1}(x))$ とする．

(2) 写像 F が安定な不動点 $\bar{x}$ を持つ a の値の範囲，および対応する $\bar{x}$ の値の範囲を求めよ．

第2問

2枚のコイン A, B がある．A を投げたとき表の出る確率は θ_A $(0 < \theta_\mathrm{A} < 1)$，B を投げたとき表の出る確率は θ_B $(0 < \theta_\mathrm{B} < 1)$ である．どちらかのコインを投げ，表が出たら次も同じコインを投げ，裏が出たら次はもう一方のコインを投げる，というルールに従ってコインを n 回投げる．1回目に投げるコインは確率 1/2 で A か B を選ぶものとする．以下の設問に答えよ．

(1) n 回目に投げるコインが A である確率を求めよ．

(2) n 回投げたとき，表の出る回数の期待値を $H(n)$ とする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(n)}{n}$$

を求めよ．

(3) $\theta_\mathrm{A} \neq \theta_\mathrm{B}$ のとき，(2) で求めた値は $(\theta_\mathrm{A} + \theta_\mathrm{B})/2$ より大きいことを示せ．

第 3 問

定数 p を $0 < p < 1$ の範囲で定める．分布関数 $F_X : \mathbb{R} \to (0,1)$ が逆関数 ${F_X}^{-1}$ を持ち，$\int_0^1 |{F_X}^{-1}(u)| \mathrm{d}u < \infty$ を満たすような任意の実数値確率変数 X に対して，

$$R[X] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 {F_X}^{-1}(u) \mathrm{d}u$$

と定義する．ここで，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表わし，$(0,1) = \{x \mid 0 < x < 1\}$ である．以下の設問に答えよ．

ただし，確率変数 X の期待値を $\mathrm{E}[X]$ で表わす．また，事象 A に対して，A が起こる確率を $\Pr(A)$ と書き，事象 A が起こるとき 1，そうでないとき 0 となる確率変数を I_A と表わす．

(1) 分布関数が $F_T(t) = 1/(1 + \mathrm{e}^{-t})$ となる確率変数 T に対して，$R[T]$ を求めよ．

(2) $R[X]$ が定義されるような確率変数 X を考え，$X \geq {F_X}^{-1}(p)$ となる事象を B と書く．このとき

$$\Pr(B) = 1 - p, \quad R[X] = \frac{\mathrm{E}[X \cdot I_B]}{1-p}$$

となることを示せ．また，$\Pr(A) = 1 - p$ を満たす任意の事象 A に対し，不等式

$$\mathrm{E}[X \cdot I_A] \leq \mathrm{E}[X \cdot I_B]$$

が成り立つことを示せ．

(3) 独立とは限らない確率変数 X, Y に対し，$R[X], R[Y], R[X+Y]$ のいずれもが定義されるならば，不等式

$$R[X+Y] \leq R[X] + R[Y]$$

が成り立つことを示せ．

第4問

同じ大きさの正方行列 A, B に対して，記号 (A,B), $[A,B]$ を

$$\begin{aligned}(A,B) &= AB+BA,\\ [A,B] &= AB-BA\end{aligned}$$

で定める．行列 A の転置を $A^\top$ と書き，$A^\top=-A$ を満たす行列 A を歪対称行列と呼ぶ．実正方行列 $X(t)$ に関する微分方程式の初期値問題

$$(*)\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)=[(M,X(t)),X(t)],\\ X(0)=X_0\end{cases}$$

を考える．ただし，M は $X(t)$ と同じ大きさの歪対称行列で，X_0 は対称行列であるものとする．以下の設問を答えよ．

(1) 初期値問題 $(*)$ の解 $X(t)$ は，すべての $t\geq 0$ で対称行列となることを示せ．

初期値問題 $(*)$ の解 $X(t)$ を用いて，$X(t)$ と同じ大きさの実行列 $Q(t)$ に関する新たな微分方程式

$$(**)\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)=(M,X(t))Q(t),\\ Q(0)=I\end{cases}$$

を考える．ただし，I は単位行列とする．

(2) $(**)$ の解 $Q(t)$ を用いて，$t\geq 0$ における $(*)$ の解 $X(t)$ が $X(t)=Q(t)X_0Q(t)^\top$ と表わされることを示せ．

(3) 初期値問題 $(*)$ の解 $X(t)$ が，すべての $t\geq 0$ で X_0 と同じ固有値を持つことを示せ．

次に，初期値問題 $(*)$ の数値解法を考える．変数 t の離散化幅を Δt とし，$t=k\Delta t$ $(k=1,2,\ldots)$ での $X(t)$, $Q(t)$ の近似解 X_k, Q_k を漸化式

$$(\dagger)\begin{cases}\dfrac{Q_k-Q_{k-1}}{\Delta t}=(M,X_{k-1})\dfrac{Q_k+Q_{k-1}}{2},\\ X_k=Q_kX_{k-1}{Q_k}^\top\end{cases}$$

で定める．ただし，$Q_0=Q(0)=I$ とし，X_0 は $(*)$ で与えられたものとする．

(4) 漸化式 $(\dagger)$ を満たす X_k, Q_k $(k=1,2,\ldots)$ が一意に定まり，X_k が対称行列となることを示せ．

(5) 近似解 X_k $(k=1,2,\ldots)$ が X_0 と同じ固有値を持つことを示せ．

第5問

頂点集合 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ と枝集合 E からなる連結無向グラフ $G = (V, E)$ を考える．頂点 v_i に接続する枝の本数を d_i と書く．ただし，G には自己閉路や多重枝は無いものとする．$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$, $L = (l_{ij})$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (\{v_i, v_j\} \in E \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}), \end{cases} \qquad l_{ij} = \begin{cases} -1 & (\{v_i, v_j\} \in E \text{ のとき}), \\ d_i & (i = j \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 A のべき乗 A^k の (i, j) 成分は何を表わすか．

(2) 2頂点間の距離をその2頂点を結ぶ経路の最小枝数で定める．任意の2頂点間の距離は，A の相異なる固有値の個数より小さいことを示せ．

(3) 行列 L の非零固有値に対応する固有ベクトル $u = (u_i)$ について，$\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$ となることを示せ．

(4) 行列 L の固有値はすべて非負実数であることを示せ．

(5) 関数 $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}(x_i - x_j)^2 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

と定義し，$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ に関する微分方程式系

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\left.\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\right|_{x=x(t)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

を考える．初期値 $x(0) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ に対する解 $x(t)$ の極限 $\bar{x} = \lim_{t \to \infty} x(t)$ を求め，収束の速さについて論じよ．