数理情報学専攻

修士課程入学試験問題

専門科目 数理情報学

平成３０年８月２１日（火）　１０：００～１３：００

５問出題，３問解答

注　意　事　項

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．

(3) 日本語ないし英語で解答せよ．

(4) 答案用紙３枚が渡される．１問ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること．止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい．

(5) 各答案用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．

(6) 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．

(7) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．

(8) 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

選択した問題番号			

上欄に選択した３つの問題番号を記入すること．

第1問

n 次実正方行列 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は

$$a_{ij} \geq 0\ (i,j = 1,2,\ldots,n), \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1\ (j = 1,2,\ldots,n), \quad B = \alpha A + \frac{1-\alpha}{n}\,\mathbb{1}\mathbb{1}^\top$$

を満たすものとする．ただし，$\top$ は転置を表し，α は $0 < \alpha < 1$ を満たす実数，$\mathbb{1}$ はすべての成分が1であるベクトル $\mathbb{1} = (1,\ldots,1)^\top \in \mathbb{R}^n$ とする．また，$v = (v_1,\ldots,v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ について $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値の絶対値で最大となるものを求めよ．

(2) 各成分が非負のベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ で，

$$Bx = x, \quad \mathbb{1}^\top x = 1$$

となるものが存在することを示せ．なお，次の事実を用いてよい:

「$\mathbb{R}^n$ の非空なコンパクト凸集合からそれ自身への連続写像には不動点が存在する.」

(3) $\mathbb{1}^\top q = 0$ を満たすベクトル $q = (q_1,\ldots,q_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\left|\sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} b_{ij}|q_j| - \frac{1-\alpha}{n}\|q\|_1 \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

となることを示せ．

(4) (2) の条件を満たすベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ は，正の整数 N に対して，

$$\left\|B^N \frac{\mathbb{1}}{n} - x\right\|_1 \leq \alpha^N \left\|\frac{\mathbb{1}}{n} - x\right\|_1$$

を満たすことを示せ．

第 2 問

$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする．k 個の独立同一な確率変数 X_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ を，各 X_i が $\mathbb{R}^2$-値確率変数で平均 $\mathbf{0} = (0, 0)^\top$，分散共分散行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の 2 変量正規分布に従うものと定める．ただし，$\top$ は転置を表す．$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\varphi(x) := \max\{x, 0\}$ $(x \in \mathbb{R})$ と定め，$u \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$g_u(x_1, \ldots, x_k) := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \varphi(u^\top x_j) \quad (x_j \in \mathbb{R}^2,\ j = 1, 2, \ldots, k)$$

と定める．このとき，ある非ゼロベクトル $u^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ を固定して，

$$L(u) = \mathrm{E}_X \left[\left(g_u(X_1, \ldots, X_k) - g_{u^*}(X_1, \ldots, X_k) \right)^2 \right]$$

を $u \in \mathbb{R}^2$ に関して最小化する問題を考える．ただし，E_X は $X = (X_1, \ldots, X_k)$ に関する期待値とする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{E}_X[\varphi(u^\top X_i)\varphi(u^\top X_j)]$ $(1 \leq i, j \leq k)$ の値を計算して，u を用いて表せ．

以下では $k = 1$ の場合を考える．$u \neq \mathbf{0}$ に対し，$0 \leq \theta \leq \pi$ を u と u^* の角度，すなわち $\theta := \cos^{-1}\left(\dfrac{u^\top u^*}{\sqrt{(u^\top u)(u^{*\top} u^*)}} \right)$ とする．

(2) 以下の積分値を求めよ:

$$\int_0^\infty \left(\int_{\theta-\pi/2}^{\pi/2} r^3 \cos(\psi) \cos(\theta - \psi) \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2} \right) \mathrm{d}\psi \right) \mathrm{d}r.$$

(3) $L(u)$ の値を計算し，$\|u\|$, $\|u^*\|$, θ を用いて表せ．

(4) $L(u)$ を $u \in \mathbb{R}^2$ に関して最小化する問題の局所的最適解をすべて列挙せよ．また，大域的最適解もすべて列挙せよ．

第 3 問

$\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とする．$x, y \in \mathbb{R}^n$ の内積を $\langle x, y \rangle$ で表し，x のノルムを $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 非空な閉集合 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ と点 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，以下を示せ:

(1-1) $\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\|$ を満たす $y \in K$ が存在する．

(1-2) K が凸なら，そのような点 y は一意に定まる．

(1-3) K が凸で，x が K に含まれないなら，ある $c \in \mathbb{R}^n$ と $d \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &> d, \\ \langle c, z \rangle &\leq d \quad (z \in K) \end{aligned}$$

となる．

(2) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\mathcal{A}$ に対して $C(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}^n$ を $\mathcal{A}$ の元たちの非負結合全体とする．すなわち，$\mathcal{A}$ の元 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(m \geq 1)$ と非負実数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ によって，$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m$ とかける点 x からなる集合が $C(\mathcal{A})$ である．

(2-1) $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して，以下が成立することを示せ:

$$C(\mathcal{A}) = \bigcup_{\mathcal{B}} C(\mathcal{B}).$$

ここで，和は，$\mathcal{A}$ のすべての一次独立な部分集合 $\mathcal{B}$ にわたってとる．

(2-2) $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ が有限集合なら $C(\mathcal{A})$ は閉集合となることを示せ．

(3) $n \times m$ 実行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ と n 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，以下の 2 つの性質 (P), (Q) を考える:

(P) $A\lambda = x,\ \lambda \geq 0$ を満たす $\lambda \in \mathbb{R}^m$ が存在する．

(Q) $c^\top A \leq 0,\ c^\top x > 0$ を満たす $c \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

ここで，$\top$ は転置を表し，ベクトル u に対して記法 $u \geq 0$ $(u \leq 0)$ は u の各成分が非負（非正）であることを意味する．以下を示せ:

(3-1) (P) と (Q) は同時に成立することはない．

(3-2) (P) と (Q) のどちらかは成立する．

第４問

n 次複素正方行列 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ に対し，$\mathrm{e}^X := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$ と定める．ここで X^0 は n 次単位行列 I とする．また，n 次元複素ベクトル $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{C}^n$ のノルムを $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$ と定める．ただし $\top$ は転置を表す．さらに，行列 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ のノルムを $\|X\| := \sup_{x\in\mathbb{C}^n,\ \|x\|=1} \|Xx\|$ と定める．このとき，任意の $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ に対し $\|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|$ および $\|XY\| \le \|X\|\|Y\|$ が成り立つ．以下の設問に答えよ．

(1) $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ に対し，次の不等式を示せ:

$$\|\mathrm{e}^X\| \le \mathrm{e}^{\|X\|}, \quad \|\mathrm{e}^X - \mathrm{I}\| \le \|X\|\,\mathrm{e}^{\|X\|}, \quad \|\mathrm{e}^X - \mathrm{I} - X\| \le \|X\|^2\,\mathrm{e}^{\|X\|}.$$

以下では，$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, m を 1 以上の整数とし，$P := \mathrm{e}^{(A+B)/m}$, $Q := \mathrm{e}^{A/m}\mathrm{e}^{B/m}$ とおく．

(2) 以下の不等式を示せ:

$$\|P^m - Q^m\| \le m\,\|P - Q\|\,\mathrm{e}^{\frac{m-1}{m}(\|A\|+\|B\|)}.$$

ここで，等式 $P^m - Q^m = \sum_{i=0}^{m-1} P^i (P-Q) Q^{m-1-i}$ は証明せずに用いてよい．

(3) 以下の等式を示せ:

$$P - Q = g\left(\frac{A+B}{m}\right) - g\left(\frac{A}{m}\right) - g\left(\frac{B}{m}\right) - f\left(\frac{A}{m}\right) f\left(\frac{B}{m}\right).$$

ここで，$X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ に対し，$f(X) := \mathrm{e}^X - \mathrm{I}$, $g(X) := \mathrm{e}^X - \mathrm{I} - X$ とする．

(4) 次の不等式を示せ:

$$\|P^m - Q^m\| \le \frac{2}{m} (\|A\| + \|B\|)^2\ \mathrm{e}^{\|A\|+\|B\|}.$$

(5) n 次元複素ベクトル値関数 $x(t)$ に対する常微分方程式の初期値問題

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = (A+B)x(t), \quad x(0) = v$$

を考える．n 次元複素ベクトルの列 $\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^{2m}$ を，$\tilde{x}^0 = v$ かつ

$$\tilde{x}^{k+1} = \begin{cases} \mathrm{e}^{B/m}\,\tilde{x}^k & (k\ \text{が偶数}), \\ \mathrm{e}^{A/m}\,\tilde{x}^k & (k\ \text{が奇数}), \end{cases} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1)$$

で定める．このとき，$0 < \alpha < 1$ を満たす任意の実数 α に対し，以下が成り立つことを示せ:

$$\lim_{m\to\infty} m^\alpha \left\| x(1) - \tilde{x}^{2m} \right\| = 0.$$

第 5 問

n 節点の木 T を考える．T のセントロイド (centroid) を，T の節点のうちで次の条件を満たす任意の節点 c と定義する:

「T から節点 c を削除してできる木 $T_1, T_2, \ldots$ の節点数が全て $n/2$ 以下である.」

以下の設問に答えよ．ただし，任意の数は $\mathrm{O}(1)$ 領域で表現できるものとする．

(1) 木 T から節点 v を削除してできる木を $T_1, T_2, \ldots$ とする．v が T のセントロイドではない場合，$T_1, T_2, \ldots$ のうち丁度 1 つの木に T のセントロイドが存在することを示せ．

T から n 節点の別の根付き木 R を作成する．T の節点と R の節点には 1 対 1 対応があり，T の節点 v に対応する R の節点を $\bar{v}$ で表す．$R = \mathrm{R}(T)$ は以下の再帰アルゴリズムで作成する:

- T が 1 節点 v からなる場合，$\mathrm{R}(T)$ は 1 節点 $\bar{v}$ からなる木である．
- そうではない場合，T のセントロイド c を任意に選び，T から c を削除してできる木 $T_1, T_2, \ldots$ に対して再帰的に $R_1 = \mathrm{R}(T_1), R_2 = \mathrm{R}(T_2), \ldots$ を作成する．そして，$\mathrm{R}(T)$ の根として $\bar{c}$ を新しく用意し，$\bar{c}$ の子が $R_1, R_2, \ldots$ の根となるように根付き木 $\mathrm{R}(T)$ を定める．

図 1 は T から対応する R を作成する手順を表す．

(2) R の高さは $\mathrm{O}(\log n)$ であることを示せ．

(3) R の節点 $\bar{v}$ を考え，R_i と R_j を $\bar{v}$ の子である異なる部分木とする．2 節点 $\bar{v_i}$ と $\bar{v_j}$ をそれぞれ R_i と R_j の節点とする．このとき，T 内の v_i と v_j の間の単純パスは v を通り，さらに $\bar{v}$ を根とする R の部分木の節点に対応する T の節点のみを通ることを示せ．

(4) R の節点 $\bar{v}, \bar{w}$ に対し，$\mathrm{lca}(\bar{v}, \bar{w})$ を $\bar{v}$ と $\bar{w}$ の共通の祖先で根からのパスの長さが最大のものと定義する．$\mathrm{lca}(\bar{v}, \bar{w})$ を $\mathrm{O}(\log n)$ 時間で計算できることを示せ．

(5) T に $\mathrm{O}(n \log n)$ 領域のデータ構造を追加しておくことで，T の 2 つの節点間の単純パスの長さを $\mathrm{O}(\log n)$ 時間で計算できることを示せ．

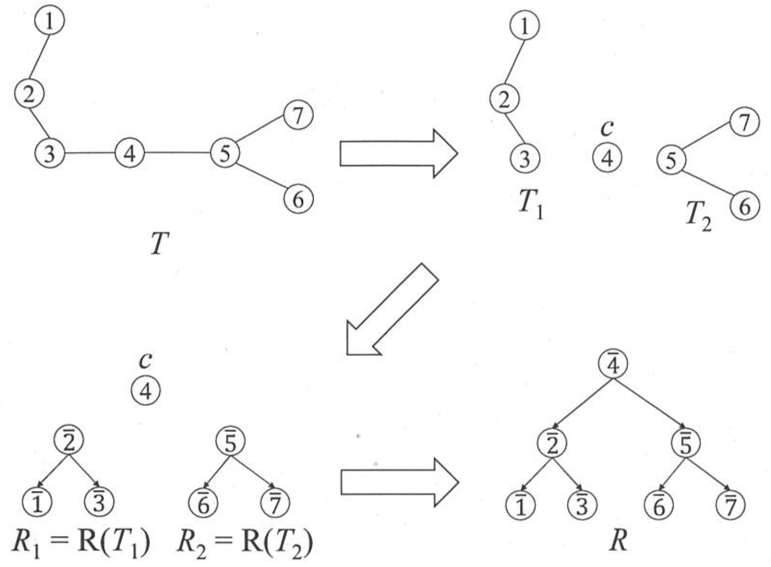

図 1. (左上) 木 T, (右上) T からセントロイド c を削除してできる木 T_1, T_2, (左下) T_1, T_2 から作られる根付き木 $R_1 = \mathrm{R}(T_1), R_2 = \mathrm{R}(T_2)$, (右下) 根付き木 $R = \mathrm{R}(T)$.