重み付きマトロイドパリティ問題に対する辞書式順序による近似解法

数理情報学専攻 48-226220 遠山 瑠唯
指導教員 岩田 覚 教授

1 はじめに

マトロイドパリティ問題は，グラフマッチング問題とマトロイド交差問題の共通の一般化として定式された問題である．グラフマッチングとマトロイド交差では重み付きの問題に対しても多項式時間アルゴリズムが知られている一方で，マトロイドパリティ問題は重みのないバージョンでさえ，一般には多項式時間で解けない問題として知られる．

マトロイドが線形である場合，すなわちマトロイドが行列表現を持つ場合には，重みなし問題については Lovász[6] が，重み付き問題についても Iwata & Kobayashi[3] が初めて，多項式時間アルゴリズムの存在を示した．マトロイドが線形とは限らない一般の場合には，近似解法の研究が進行している．Lee et al.[5] によって，一般マトロイド上の重みなしマトロイドパリティ問題に対する PTAS(多項式時間近似スキーム) が与えられ，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(1+\varepsilon)$-近似多項式時間アルゴリズムが存在することが示された．重み付きの場合も，マトロイドが強基対付合 (strongly base orderable) という条件を満たす場合には PTAS が適用できることがわかっている [7].

一方で，Bérczi, Király, Yamaguchi & Yokoi (2022) は，二部グラフのランク最大 (rank-maximal) マッチング問題 [2] を辞書式順序の最大化問題として定式化し，重み付きグラフマッチング問題と重み付きマトロイド交差問題において，辞書式順序最大の解が通常の最大重み解のある近似を与えていることを示した．

本論文では，同様の定理が，強基対付合マトロイド上の重み付きマトロイドパリティ問題においても成り立つことを示す．

2 準備

2.1 マトロイドパリティ

$\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ をマトロイドとし，$|E|$ は偶数とする．E の大きさ 2 の部分集合 (ライン) への分割を $L \subset 2^E$ として，ラインの和集合として表されるような E の部分集合をパリティ集合と呼ぶ．特に，パリティ集合 X が独立であるとき，独立パリティ集合と呼ぶ.

定義 2.1 (重み付きマトロイドパリティ問題)**.** ライン重み $w : L \to \mathbb{R}_{>0}$ が与えられているとする．このとき，重み付きマトロイドパリティ問題 $(\mathbf{M}, L, w)$ とは，次の問題である.

maximize $\quad w(X) = \sum_{l \subseteq X} w(l)$,
subject to $\quad X$ は独立パリティ集合.

定義 2.2 (強基対付合)**.** マトロイド $\mathbf{M} = (E, \mathcal{I})$ が次の条件を満たすとき，$\mathbf{M}$ を強基対付合 (strongly base orderable) であると言う : 任意の基 $B_1, B_2 \in \mathcal{I}$ に対し，全単射 $f : B_1 \to B_2$ が存在し，任意の $S \subseteq E$ に対し，$(B_1 \setminus S) \cup f(S)$ が再び基となる.

なお，強基対付合マトロイドパリティ問題は，重みなしの問題であっても NP 困難であり [7]，強基対付合性と線形性はいずれも他を包含しない.

2.2 辞書式順序

台集合を E とし，要素重み $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$ を持つ重み付き問題に対し，重みとして現れる値全体を降順に並べて $w_1 > \cdots > w_k$ とし，部分集合 X の分割を $X_i := \{e \in X \mid w(e) = w_i\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ で定める.

定義 2.3 (辞書式順序)**.** $X, Y \subseteq E$ とする．ある $i \in \{1, \ldots, k\}$ が存在して，$|X_j| = |Y_j|$ $(j = 1, \ldots, i-1)$, $|X_i| < |Y_i|$ を満たすとき，$X <_{\mathrm{lex}} Y$ と書く.

解 X に対し，$X <_{\mathrm{lex}} Y$ なる解 Y が存在しないとき，X を辞書順最大の解と呼ぶ．辞書順最大解は一意とは限らないが，任意の辞書順最大解 X, Y について $|X_j| = |Y_j|$ $(j = 1, \ldots, k)$ は成り立つので，重みとしては一意である.

3 近似定理

3.1 グラフマッチング・マトロイド交差

辞書順最大解と最大重み解は一般には異なるが，Bérczi et al[1] は，グラフマッチング問題とマトロイド交差問題において，辞書順最大解が最大重みの近似を与えることを示した.

重み付きグラフマッチング問題 (G, w) とは，無向グラフ G と枝重み w に対し，最大重みのマッチングを求める問題である．また，重み付きマトロイド交差問題 $(\mathbf{M}^+, \mathbf{M}^-, w)$ とは，共通の台集合上のマトロイド $\mathbf{M}^+, \mathbf{M}^-$ に対し，最大重みの共通独立集合 (いずれのマトロイドでも独立である集合) を求める問題である．辞書順最大の解の重みを lexopt, 最大重み解の重み (通常の意味での最適値) を opt と書き，$\alpha_w > 1$ を

$$\alpha_w := \min_{1 \le i \le k-1} \frac{w_i}{w_{i+1}}$$

と定義すると，次の定理が成り立つ．

定理 3.1. [1, Theorem 2.1]

$$\mathrm{lexopt}(G, w) \ge \min\{\alpha_w/2, 1\}\ \mathrm{opt}(G, w)$$

定理 3.2. [1, Theorem 2.2]

$$\mathrm{lexopt}(\mathbf{M}^+, \mathbf{M}^-, w) \ge \min\{\alpha_w/2, 1\}\ \mathrm{opt}(\mathbf{M}^+, \mathbf{M}^-, w)$$

この定理は，$1 < \alpha_w < 2$ ならば，辞書順最大解の重みは最適値の $\alpha/2$ 倍以上になっており，$\alpha_w \ge 2$ ならば，すなわち異なる重み同士の比が全て 2 以上ならば，辞書式最大解は最大重み解となるということを示している．

3.2 強基対付合マトロイドパリティ

重み付きマトロイドパリティ問題 $(\mathbf{M}, L, w)$ でも，パリティ集合全体の集合上で辞書式順序を同様に定義できる．次の予想は，定理 3.1 と定理 3.2 の共通の一般化となっている．

予想 3.3. 重み付きマトロイドパリティ問題 $(\mathbf{M}, L, w)$ に対し，

$$\mathrm{lexopt}(\mathbf{M}, L, w) \ge \min\{\alpha_w/2, 1\}\ \mathrm{opt}(\mathbf{M}, L, w).$$

本論文では，この予想を部分的に解決し，強基対付合マトロイドパリティ上での近似定理を示した．

定理 3.4. $\mathbf{M}$ が強基対付合であるとき，

$$\mathrm{lexopt}(\mathbf{M}, L, w) \ge \min\{\alpha_w/2, 1\}\ \mathrm{opt}(\mathbf{M}, L, w).$$

なお，グラフマッチング問題は強基対付合マトロイドパリティ問題の特殊ケースなので，定理 3.4 は定理 3.1 は含んでいる．定理の証明は，Bérczi らによる定理 3.1, 3.2 の証明と同様の枠組みで行ったが，特に，強基対付合マトロイドパリティでは次の補題が成り立つことを用いた．マトロイドの閉包関数を cl とする．

補題 3.5. 独立パリティ集合 X, Y が $|X| + 2 = |Y|$, $\mathrm{cl}(X) \not\subseteq \mathrm{cl}(Y)$ を満たすとき，$|X \cap C| = |Y \cap C|$ かつ $X \Delta C, Y \Delta C \in \mathcal{I}$ を満たすような，空でないパリティ集合 $C \subseteq X \Delta Y$ が存在する．

4 近似解法としての解釈

$l_1, \ldots, l_n$ を，全てのラインを重みの降順に並べたものとして，次のアルゴリズムを貪欲アルゴリズムと呼ぶ．

(1) $X \leftarrow \emptyset$, $i \leftarrow 1$ とする．
(2) $X \cup l_i$ が独立ならば，$X \leftarrow X \cup l_i$ とする．
(3) $i < n$ ならば $i \leftarrow i + 1$ として (2) に戻る．$i = n$ ならば X を出力する．

全ての要素の重みが互いに異なるとき，辞書順最大の解と貪欲アルゴリズムの解は一致する．Jenkyns[4] などにより，重み付きの場合も含めて貪欲アルゴリズムが 2-近似アルゴリズムであることが知られている．本論文の結果 (定理 3.4) では近似比は $2/\alpha_w (< 2)$ なので，強基対付合かつ重みが全て異なるというケースに限ってはこれを改善したと言える．

参考文献

[1] K. Bérczi, T. Király, Y. Yamaguchi, and Y. Yokoi. Approximation by lexicographically maximal solutions in matching and matroid intersection problems. *Theoretical Computer Science*, Vol. 910, pp. 48–53, 2022.
[2] R. W. Irving, T. Kavitha, K. Mehlhorn, D. Michail, and K. E. Paluch. Rank-maximal matchings. *ACM Transactions on Algorithms*, Vol. 2, No. 4, pp. 602–610, 2006.
[3] S. Iwata and Y. Kobayashi. A weighted linear matroid parity algorithm. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 51, No. 2, pp. 238–280, 2022.
[4] T. A. Jenkyns. The efficacy of the greedy algorithm. In *Proceedings of the 7th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, pp. 341–350, 1976.
[5] J. Lee, M. Sviridenko, and J. Vondrák. Matroid matching: The power of local search. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 42, pp. 357–379, 2013.
[6] L. Lovász. Selecting independent lines from a family of lines in a space. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, Vol. 42, pp. 121–131, 1980.
[7] J. A. Soto. A simple ptas for weighted matroid matching on strongly base orderable matroids. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, Vol. 37, pp. 75–80, 2011.