修士論文 要旨

ℓ_p 空間におけるグラフの大域剛性

数理情報学専攻 48226212　**杉山 友浩**
指導教員　**谷川眞一 准教授**

1　はじめに

$\mathbb{R}^d$ 上のフレームワーク $(G,\boldsymbol{p})$ とは，単純無向グラフ $G=(V,E)$ とその頂点配置 $\boldsymbol{p}:V\to\mathbb{R}^d$ の組として定義され，建築構造物や分子構造，ロボット制御などを記述する数理モデルである．G の構造および各辺の距離の情報だけから，フレームワークの大域的な構造を復元する問題を考える．復元が (等長変換の自由度を除いて) 一意なフレームワークを大域剛であるという．フレームワークの大域剛性は，グラフ G の構造と頂点配置 $\boldsymbol{p}$ の双方に依存し，判定問題は $d=1$ の場合であっても計算量的に困難であることが知られている．この困難性を回避するための標準的な処方箋として，座標値 $\{\boldsymbol{p}(i)_k\}_{i\in V,k\in[d]}$ が $\mathbb{Q}$ 上で代数的独立であるようなフレームワーク (一般的フレームワークと呼ぶ) に着目する．Connelly [1] は構造力学で利用される自己応力を重みとしたグラフラプラシアン行列を用いた，一般的フレームワークの大域剛性の十分条件を示し，その逆が Gortler-Healy-Thurston [3] によって示された．彼らによって，d 次元一般的フレームワークの大域剛性は，頂点配置 $\boldsymbol{p}$ に依らず，グラフ G の情報のみで決まることが導かれた．また 2 次元ユークリッド空間においては Jackson-Jordán [4] によって，一般的フレームワークの大域剛性に対する組合せ的な特徴付けが与えられている．

前述した問題では辺の情報はユークリッドノルムで与えられていたが，近年では非ユークリッドノルム空間におけるフレームワークの剛性に関する研究が盛んに行われてきている．本研究では前述した結果の ℓ_p 空間 ($p\neq 2$ は正の偶数) に対する類似物を証明した．まず，Connelly によってユークリッド空間のフレームワークに定義されていた重み付きラプラシアン行列を ℓ_p 空間へ一般化し，d 次元 ℓ_p 空間上の一般的フレームワークの大域剛性の十分条件を得た．特に，$d=2$ の場合において条件は必要十分であることを示し，証明を通して ℓ_p 平面上の一般的フレームワークの大域剛性に対する組合せ的な特徴付けを得た．さらに，Erdős-Rényi ランダムグラフがユークリッド空間において大域剛になるための辺のサンプル率に関する Lew [5] らの結果が ℓ_p 空間についても成り立つことを示した．

2　ℓ_p ノルム

以降 d 次元 ℓ_p 空間を ℓ_p^d と表記する．ノルム空間上のフレームワーク $(G,\boldsymbol{p})$ が大域剛であるとは，(その空間のノルムで計測した) 辺長が等しい任意のフレームワーク $(G,\boldsymbol{q})$ について，ある等長変換 η が存在して $\eta(\boldsymbol{p}(i))=\boldsymbol{q}(i)$ が任意の $i\in V(G)$ について成り立つこととして定義される．ユークリッド空間 (ℓ_2 空間) において，連続な等長変換は平行移動 (d 次元) と回転 ($\binom{d}{2}$ 次元) の任意の組合せであるのに対し，ℓ_p 空間 ($p\neq 2$) における連続な等長変換の自由度は平行移動の d 次元のみである．このようにノルムの違いは等長変換の自由度として現れる．

3　ラプラシアン行列

ℓ_p^d 上のフレームワーク $(G,\boldsymbol{p})$ に対して，$\omega:E(G)\to\mathbb{R}$ は以下の自己釣り合い条件を満たしているとき，$(G,\boldsymbol{p})$ の自己応力であるという:

$$\sum_{v:uv\in E(G)}\omega(ij)((\boldsymbol{p}(j))_k-(\boldsymbol{p}(i))_k)^{p-1}=0\ (u\in V(G),k\in[d]).$$

さらに，ある $(G,\boldsymbol{p})$ の自己応力 ω と $k\in[d]$ に対して k 番目の座標に基づく自己応力 $\omega^k:E(G)\to\mathbb{R}$ を

$$\omega^k(ij):=\omega(ij)((\boldsymbol{p}(j))_k-(\boldsymbol{p}(i))_k)^{p-2}\qquad(ij\in E(G))$$

と定義する．この ω^k によって重みづけられたラプラシアン行列 $L_{G,\omega^k}\in\mathbb{R}^{V(G)\times V(G)}$ を考える．L_{G,ω^k} の各成分は

$$L_{G,\omega}[i,j]=\begin{cases}\sum_{j:il\in E(G)}\omega(il) & (i=j)\\ -\omega(ij) & (i\neq j,ij\in E(G))\\ 0 & (i\neq j,ij\notin E(G))\end{cases}$$

と定義され，全ての成分が 1 のベクトルはカーネルに含まれる．さらに ω^k の定義より $\boldsymbol{p}(-)_k=\{(\boldsymbol{p}(i))_k\}_{i\in V(G)}$ もまたカーネルに含まれていることがわかる．よって $\operatorname{rank}L_{G,\omega^k}\leq|V(G)|-2$．この不等式を等号成立させる自己応力の存在がフレームワークの大域剛性の十分条件となることを示した．ただし，証明は Gortler-Healy-Thurston [3] がユークリッド空間上の一般的フレームワークの大域剛性の特徴付けの証明に用いた，Cayley-Menger 代数多様体の ℓ_p-類

似として p-Cayley-Menger 代数多様体を定義し，これが d-identifiable となるための特徴付けを調べることで得た.

定理 1. $p \neq 2$ を正の偶数, G を $|V(G)| \geq 3$ を満たすグラフとする．ある G の ℓ_p^d 上の一般的な頂点配置 $\boldsymbol{p}$ と， フレームワーク $(G, \boldsymbol{p})$ の自己応力 ω であって任意の $k \in [d]$ について $\operatorname{rank} L_{G,\omega^k} = |V(G)| - 2$ を満たすものが存在すると仮定する．このとき, 任意の ℓ_p^d 上の G の任意の一般的頂点配置 $\boldsymbol{q}$ について，$(G, \boldsymbol{q})$ は ℓ_p^d 上で大域剛.

4 ℓ_p 平面における大域剛性の特徴付け

この節では二次元 ℓ_p 空間上の一般的フレームワークについて考える．グラフ G について， ℓ_p^2 上で大域剛となるような一般的配置の存在性に関する特徴付けが Dewar-Hewtson-Nixon [2] によって示されている．この結果と定理 1 を組合せることで任意の一般的フレームワーク $(G, \boldsymbol{p})$ が ℓ_p^2 上で大域剛となるための必要十分条件を与えた.

定理 2. $p \neq 2$ を正の偶数とし，$n \geq 3$ を整数，G を n 頂点連結グラフとする．このとき，以下は同値である.

(i) ある 2 次元一般的フレームワーク $(G, \boldsymbol{p})$ は ℓ_p^2 上で大域剛.

(ii) 任意の 2 次元一般的フレームワーク $(G, \boldsymbol{p})$ は ℓ_p^2 上で大域剛.

(iii) 2 次元一般的フレームワーク $(G, \boldsymbol{p})$ であって，任意の k について $\operatorname{rank} L_{G,\omega^k} = n - 2$ となるような自己応力 ω を持つようなものが存在する.

(iv) G は 2 連結であって任意の $e \in E(G)$ に対して $G - e$ は辺素な 2 本の全域木を持つ.

(iii)⇒(ii) は定理 1, (ii)⇒(i) は自明，(i)⇒(iv) は先行研究 [2] によって示されている．(iv)⇒(iii) の証明は以下の 3 ステップで行った:(Step 1) 条件 (iv) を満たす任意のグラフが，特定の小さいグラフからあるグラフ操作によって生じることを示す [2]; (Step 2) 前述した特定のグラフについて (iii) が成り立つことを示す; (Step 3) 前述したグラフ操作によって性質 (iii) が保存されることを示す.

定理 2 より，ℓ_p 平面における一般的フレームワークの大域剛性は頂点配置に依存せずグラフの性質のみから定まることがわかる.

5 ランダムグラフの大域剛性

Erdős-Rényi ランダムグラフ $G(n, p)$ とは，n 頂点完全グラフの各辺を確率 p でサンプリングすることで得られるランダムグラフである．Lew ら [5] は Erdős-Rényi ランダムグラフからなる一般的フレームワークがユークリッド空間上で大域剛になるためのサンプリング率の閾値を導出した．本研究ではこの結果が ℓ_p 空間においても同様に成り立つことを示した.

定理 3. $q \neq 2$ を正の偶数とし， $d \geq 1$ を自然数とする．また $\omega(n)$ を $\lim_{n\to\infty} \omega(n) = \infty$ を満たす任意の実関数とする．$p_{\pm}^*(n) := (\log n + d \log\log n \pm \omega(n))/n$ とおく．このとき,

(i) $p > p_{+}^*(n)$ であるとき， 任意の d 次元一般的フレームワーク $(G(n,p), \boldsymbol{p})$ は漸近的にほとんど確実に ℓ_q^d 上で大域剛.

(ii) $p < p_{-}^*(n)$ であるとき， 任意の d 次元一般的フレームワーク $(G(n,p), \boldsymbol{p})$ は漸近的にほとんど確実に ℓ_q^d 上で大域剛ではない.

この定理から， フレームワークが大域剛となるような一般的頂点配置が存在するためのサンプリング率の閾値と，任意の一般的頂点配置についてフレームワークが大域剛となるための閾値は等しいことがわかる.

6 まとめ

$p \neq 2$ が偶数の場合における ℓ_p 空間上の一般的フレームワークの大域剛性に対する特徴付けを与えた．今後の展望として， p の偶数制約の緩和，および定理 2 の $d \geq 3$ への一般化が挙げられる.

参考文献

[1] Robert Connelly. Generic global rigidity. *Discrete & Computational Geometry*, 33:549–563, 2005.

[2] Sean Dewar, John Hewetson, and Anthony Nixon. Uniquely realisable graphs in analytic normed planes. *arXiv preprint arXiv:2206.07426*, 2022.

[3] Steven J Gortler, Alexander D Healy, and Dylan P Thurston. Characterizing generic global rigidity. *American Journal of Mathematics*, 132(4):897–939, 2010.

[4] Bill Jackson and Tibor Jordán. Connected rigidity matroids and unique realizations of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 94(1):1–29, 2005.

[5] Alan Lew, Eran Nevo, Yuval Peled, and Orit E Raz. Sharp threshold for rigidity of random graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 55(1):490–501, 2023.