付値マトロイド交差アルゴリズムの高速化と社会的厚生最大化問題への応用

数理情報学専攻 48226229　原 慶伍
指導教員　谷川 眞一 准教授

1　はじめに

n 個の不可分財を m 人の購入者に分配し，各購入者の財の評価値の和で表される社会的厚生関数を最大化する問題，すなわち社会的厚生最大化問題を考える．各購入者の財の評価関数が粗代替性という性質を満たすとき，社会的厚生最大化問題は付値マトロイド交差問題へ帰着可能であることが知られており，$\mathcal{T}_{v\text{-val}}$ を評価値を計算するオラクルの計算時間として，Murota [1] の付値マトロイド交差問題アルゴリズムを適用することで $O(mn^3 \log(m+n) \cdot \mathcal{T}_{v\text{-val}})$ 時間で解ける．本論文では，付値マトロイド交差問題の特殊ケースである重み付きマトロイド交差問題に対する高速化技法の近年の急速な発展に着目し，Murota [1] の付値マトロイド交差問題アルゴリズムの高速化および社会的厚生最大化問題への応用について議論する．具体的には，2022 年に Tu [5] によって提案された重み付きマトロイド交差問題に対するアルゴリズムを，独自に定義するオラクルを使用しながら付値マトロイド交差問題へ拡張する．

2　問題設定と先行研究

任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$ とし，財の集合と購入者の集合をそれぞれ $[m]$ および $[n]$ で表す．全ての購入者 i は評価関数 $v_i : 2^{[n]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を持つ．

X_i を購入者 i が所有する財の組合せとし，ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ でそれぞれの購入者が所有する分配を全て表す．このとき，$\boldsymbol{X}$ が $[n]$ の分割となっているとき，$\boldsymbol{X}$ を分配と呼ぶ．分配 $\boldsymbol{X}$ の下での購入者の評価関数の和 $\sum_{i \in [m]} v_i(X_i)$ を，社会的厚生関数と呼ぶ．購入者の人数 m，不可分財の数 n，および各購入者 $i \in [m]$ の評価関数 v_i が与えられているとき，社会的厚生関数の最大値およびその最大値を実現する分配 $\boldsymbol{X}$ を計算する問題を社会的厚生最大化問題と呼ぶ．

全ての財 $j \in [n]$ に対して価格 $p_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が設定される状況を考える．全ての財の価格を表す価格ベクトルを $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ で表す．このとき，各購入者 i それぞれの効用を $v_i(X) - \sum_{j \in X} p_j)$ で定義する．財の組合せ X を所有する購入者 i の効用は，X を購入したときの「利益」を表すとも捉えられる．

ここで，評価関数 v_i $(i \in [m])$ が粗代替性と呼ばれる性質を満たすとすると，ある分配および価格の組が存在して，財が全て分配されて各購入者の効用が最大になっている状態，すなわちワルラス均衡が存在することが知られている．さらに，ワルラス均衡が成立する分配は，社会的厚生関数を最大化することが知られている．

粗代替性を仮定すると，ワルラス均衡は多項式時間で計算可能である．特に，Murota [1] は付値マトロイド交差問題に対する組合せ的アルゴリズムを提案しているが，室田による離散凸解析の枠組みによって詳細な解析が行われている粗代替性関数の数学的特性により，ワルラス均衡の計算は付値マトロイド交差問題に帰着する．具体的には，台集合 V を $V = [mn] = \{(i,j) | i \in [m], j \in [n]\}$ と定義し，1 つ目の付値マトロイド $\mathcal{M}_1 = (V, \mathcal{B}_1, \omega_1)$ を $[mn]$ 上の n-一様マトロイド，付値 ω_1 を $S \in \mathcal{B}_1$ を $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ $(\forall i \in [m], X_i \in 2^{[n]})$ と同一視して $\omega_1(S) = \sum_i v_i(X_i)$，2 つ目の付値マトロイド $\mathcal{M}_2 = (V, \mathcal{B}_2, \omega_2)$ を $\omega_2 = 0$ で定義した分割マトロイド（ここでは，全ての財 $j \in [n]$ について $C_j = \{(1,j) \ldots, (m,j)\}$ と定義したとき，$|S \cap C_i| \leq 1$ が成り立つとき，$S \subset \cup_{i=1}^n C_j$ は独立集合であると定義する），重みを $w = 0$ で定めれば良い．

本研究では，重み付きマトロイド交差問題の最新のアルゴリズムおよび最速な計算時間を提示する，Tu [5] の高速化技法を応用する．[5] は，$\hat{n}$ をマトロイドの台集合の大きさ，r をマトロイドの階数，および $\mathcal{T}_{\mathrm{rank}}$ を階数オラクルの計算時間として $\widetilde{O}(\hat{n} r^{3/4} \cdot \mathcal{T}_{\mathrm{rank}})$ 時間のアルゴリズムを構築し，これは階数オラクルを使用して $\widetilde{O}(\hat{n} r)$ 未満の計算時間で厳密解を求める，最初のアルゴリズムである．[5] のアルゴリズムは 2 つのステップからなる．1 つめのステップでは，Shigeno and Iwata [4] のアルゴリズムを活用して近似解を計算し，2 つ目のステップでは，近年発見されている，平衡二分探索木上での二分探索によりマトロイドの交換関係を効率的に見つける手法を活用して効率化された増加路探索を適用する．辺に重みのある交換可能性グラフにおいて全ての辺を陽的に構築せずに最短路木を効率的に計算

する手法は，[5] 独自の貢献となっている．

3 本研究の貢献

本研究では，2 つのアルゴリズムを考察した．1 つ目のアルゴリズムは Shigeno の博士論文 Shigeno [3] により構築されているものである．2 つ目のアルゴリズムは前者のアルゴリズムを改良したものであり，本研究の貢献となる．前者のアルゴリズムは後者のアルゴリズムの基礎をなすため，詳細に考察している．

3.1 Shigeno [3] のアルゴリズム

Shigeno [3] のアルゴリズムでは 2 つのステップが繰り返させれる．1 つ目のステップでは，$\epsilon > 0$ としたときの重みの近似分割 $w(x) \leq w^\epsilon(x) \leq w(x) + \epsilon, w^\epsilon(x) = w_1^\epsilon(x) + w_2^\epsilon(x)$ を新しく設定する．そこから，$\omega[w](S) = \omega(S) + \sum\{w(u)|u \in S\}$ $(S \subseteq V)$ として，$S_1 \in \mathcal{B}_1$ が $\omega_1[w_1^\epsilon]$ 極大，$S_2 \in \mathcal{B}_2$ が $\omega_2[w_2^\epsilon]$ 極大であることを保ちながら，Shigeno and Iwata [4] により提案された重みの調整をしながら頂点の交換を繰り返す．$0 \leq \ell < 1$ を満たす定数 ℓ をパラメータとして，これを $|S_1 \cap S_2| \geq r - O(r^{1-\ell})$ となる近似解を得るまで繰り返す．2 つ目のステップでは，Murota [1] と同様に交換可能性グラフを陽的に構築した上でダイクストラ法により増加路を計算し，増加路に沿った S_1, S_2 の更新を $O(r^{1-\ell})$ 回繰り返す．この 2 つのステップを経た ϵ 近似の改善を ϵ が十分小さくなるまで繰り返せば，$\mathcal{T}_{\omega-\mathrm{val}}$ を付値を計算するオラクルとして付値マトロイド交差問題の最適解が $\widetilde{O}(\hat{n}r^{2-\ell} \cdot \mathcal{T}_{\mathrm{rank}} + (\hat{n}^2 r^\ell + \hat{n}r^{2-\ell}) \cdot \mathcal{T}_{\omega-\mathrm{val}} + \hat{n} \log \hat{n} r^{1-\ell})$ 時間で得られる．

3.2 提案アルゴリズム

提案するアルゴリズムでは，Shigeno [3] のアルゴリズムにおいて，Tu [5] と同様の手法を使うことにより，最適な頂点の交換関係ないし交換可能性グラフにおける辺の計算を効率化する．

ここでは，「最大周辺利得オラクル」と名付けられる，付値 ω, 基 S, 集合 $U \subseteq V$, 頂点 $s \in S$ が与えられたとき，$\arg\max_{u \in U} \omega(S, s, u) = \omega(S \setminus \{s\} \cup \{u\}) - \omega(S)$ を $\mathcal{T}_{\text{max-mg}}$ 時間で求めるオラクルを仮定する．最大周辺利得オラクルを仮定すれば，Shigeno [3] のアルゴリズムのステップ 1 における頂点の交換の計算時間が再評価できる．また，[5] の技法を応用し，交換可能性グラフを陽的に構築せずに最大周辺利得オラクルを用いて最短路木の辺を効率的に探索すれば，ダイクストラ法による増加路探索は $O(\hat{n}\sqrt{r} \cdot \mathcal{T}_{\text{max-mg}})$ 時間に改善される．

提案アルゴリズムの計算時間は，$\ell = 3/4$ として $\widetilde{O}(\hat{n}r^{3/4} \cdot \mathcal{T}_{\text{max-mg}})$ となる．特に，ワルラス均衡を計算する場合は，ω_1 の m 個の関数の和で表されるという構造を活かして $O(m \log n + n \log n \cdot \mathcal{T}_{v\text{-val}})$ 時間の最大周辺利得オラクルが設計可能であり，全体の計算が $\widetilde{O}(m^2 n^{7/4} + mn^{11/4} \cdot \mathcal{T}_{v\text{-val}})$ 時間で可能であることを示した．これは [1] の増加路アルゴリズムをそのまま適用した場合の $\widetilde{O}(mn^3 \cdot \mathcal{T}_{v\text{-val}})$ 計算時間の改善となる．また，現段階において社会的厚生最大化問題に対する最速なアルゴリズムである Paes Leme and Wong [2] の $\widetilde{O}((mn + n^3) \cdot \mathcal{T}_{v\text{-val}})$ 時間アルゴリズムと比較すれば，$m = o(n^{1/4})$ の場合は高速化を達成している．

4 今後の展望

Paes Leme and Wong [2] のアルゴリズムでは交換可能性グラフの辺の本数が高々 $O(n^2)$ 本にまで削減され，各反復の増加路の計算時間が $\widetilde{O}(n^2)$ にまで高速化される．この簡略化された構造において本論文で使用した技法を直接的に適用する場合は，平衡二分探索木の実装がボトルネックとなるため，さらなる高速化は今後の課題となる．

参考文献

[1] K. Murota. Valuated matroid intersection ii: Algorithms. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 9(4):562–576, 1996.

[2] R. Paes Leme and S. C.-w. Wong. Computing walrasian equilibria: Fast algorithms and structural properties. *Mathematical Programming*, 179(1-2): 343–384, 2020.

[3] M. Shigeno. *A Dual Approximation Approach to Matroid Optimization Problems.* Phd thesis, Tokyo Institute of Technology, 1996.

[4] M. Shigeno and S. Iwata. A dual approximation approach to weighted matroid intersection. *Operations research letters*, 18(3):153–156, 1995.

[5] T.-W. Tu. Subquadratic Weighted Matroid Intersection Under Rank Oracles. In S. W. Bae and H. Park, editors, *33rd International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2022)*, volume 248 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 63:1–63:14, Dagstuhl, Germany, 2022.