修士論文 要旨

時間発展方程式に対する構造保存型数値解法の収束解析と数値的解析

数理情報学専攻 48216213　川合 秀人
指導教員　松尾 宇泰 教授

1　はじめに

構造保存数値計算法（構造保存解法）は、偏微分方程式の解がなす数理構造を抽出した「不変量」に対応する離散量の保存により解を高精度で近似する手法である．離散変分導関数法 (DVDM, [1]) の開発を契機として，一般手法の研究が進捗する一方，厳密な理論的正当性は個別論に留まっている．

本論文では，収束性が証明済の構造保存解法の保存量の共通点に基づく分類により，収束性の証明の議論を整理する．この論法をいくつかのスキームに適用することで，上記の共通点が証明に有効であり，この性質がない場合は困難な状況になることが確認される．

さらに，Zakharov 方程式系の構造保存解法に関する数値実験を行う．この方程式系では，その特殊性を個別的に活かした構造保存スキームの研究が充分に進んでいるが，一般手法 DVDM でもスキームを構成できる．実際にどちらのスキームが優れているかは明らかではないため，この問題に答えるための集中的な数値計算を行った．その結果，個別性を活かした高速なスキームの方が多くの状況では優れていたが，長時間の数値実験における安定性では DVDM の優位性が確認できた．

2　数学的準備

偏微分方程式 $u_t = f(u, u_x, \ldots)$ の解を $u(t,x)$ とし，周期境界条件 $u(t, x+L) = u(t,x)$ を仮定する．近似解 $u_k^{(m)} \approx u(m\Delta t, k\Delta x)$ を計算することが数値計算法の目的である．その精度を高めるために，構造保存解法では以下の保存量を利用する：

$$\int u(t,x)\mathrm{d}x = \int u(0,x)\mathrm{d}x \ \ (\text{質量}),$$
$$\int u(t,x)^2\mathrm{d}x = \int u(0,x)^2\mathrm{d}x \ \ (\text{ノルム}),$$

そして各方程式に固有のエネルギーである．

構造保存解法の正当性は「可解性」と「収束性」で評価される．可解性とは，初期値 $u^{(0)}$ に対し，数値解 $u^{(m)}$ が各 m で一意に定まることであり，固定点定理に帰着させる論法が確立されている．一方，収束性とは，誤差項を $e^{(m)} \coloneqq \left(u_k^{(m)} - u(m\Delta t, k\Delta x)\right)_k$ とすると，あるノルム $\|\cdot\|_X$ に対して $\left\|e^{(m)}\right\|_X \to 0$ $(\Delta t, \Delta x \to 0)$ となることをいう．これを示すには，

$$\delta_t^+ \left\|e^{(m)}\right\|_X^2 \le C\left(\left\|e^{(m+1)}\right\|_X^2 + \left\|e^{(m)}\right\|_X^2\right) + (\text{微小量})$$

を示せば，離散 Gronwall の補題で証明が終わる．が，
(1) どの $\|\cdot\|_X$ を選ぶか，
(2) その $\|\cdot\|_X$ に対していかに不等式評価を示すか，
の 2 点の議論は未整理で，$\|\cdot\|_X$ 相当の概念が天下り的に登場する例もある．また，不等式評価の際は方程式の (a) 空間微分の次数と (b) 非線形性に基づく困難があるため，そもそも収束性が未証明のスキームも多い．

そこで本論文では，収束性が証明済のスキームの共通点の分析を通じて未証明のスキームにアプローチする．

3　保存量の分類と収束性の証明

収束性が証明済の構造保存スキームの多くはノルム $\|v\|_2 \coloneqq \left(\sum_k |v_k|^2\Delta x\right)^{1/2}$ を保存する. つまりスキームは $\delta_t^+\|u^{(m)}\|_2^2 = 0$ を満たす形のため，$\delta_t^+\|e^{(m)}\|_2^2$ を評価しやすい（$\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_2$）．筆者の卒業研究で扱った Ostrovsky 方程式のノルム保存スキームが例である．

保存量がノルムでなくても，何らかのノルムの 2 乗和で書ける場合，この 2 次エネルギーに対応する $\|\cdot\|_X$ を選ぶと収束性を証明できる例が多い．

$$\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{p} {}_pC_q \left\|\left(\delta_x^+\right)^q u^{(m)}\right\|_2^2$$

を保存する modified Camassa–Holm 方程式の構造保存スキームもそのひとつであり，パラメータが $p=2$ の場合に対して先行研究 [2] で収束性が示されていたが，筆者はこの結果を一般の p に対し拡張できた．

一方，非 2 次エネルギーを保存する構造保存スキームでは，収束性の証明は非常に難しい．例外として Zakharov 方程式系があるが，これは非 2 次エネルギー

$$\mathcal{E}(t) \coloneqq \int\left[\left|E_x\right|^2 + \frac{1}{2}\left(N^2 + V_x^2\right) + N\left|E\right|^2\right]\mathrm{d}x \quad (1)$$

とノルムを同時に保存できる特殊な例である．Glassey のスキーム [3] で $\Delta t = \Delta x$ の場合に収束性が示されていたが，筆者は類似の DVDM スキーム [1] に対しても収束性を証明し，その際に仮定の除外に成功した．

この場合，非 2 次エネルギーのうち，2 次量の部分を抜き出したものに対応する $\|\cdot\|_X$ を選ぶと，議論の工夫により (a) 空間微分の次数による困難には対処できる．一方で，(b) 非線形性による困難へと対処できるのは，Zakharov 方程式系の保存スキームではノルムを同時に保存できるという特殊性ゆえである．

ゆえに，非 2 次エネルギーのみを保存するスキームでの収束性証明は困難になる．実際，Ostrovsky 方程式のエネルギー保存スキームでこのことが確認されている．

ここで，Ostrovsky 方程式に関しては，ノルムを保存するスキームの収束性を卒業研究で筆者はすでに証明しているが，それでもエネルギー保存スキームには解析の価値がある．

というのも，そもそも構造保存解法の精度は方程式がなす系の数理構造を保存量が抽出していることに由来するが，ノルムよりエネルギーの方が特徴量として適切なのである．実際，[4] での数値実験では，エネルギー保存スキームの方が良い結果を示している．

さて，Ostrovsky 方程式のエネルギー保存スキームの収束性を証明する際も，非 2 次エネルギー

$$\frac{\alpha}{6}\sum_k \left(u_k^{(m)}\right)^3 \Delta x + \frac{\beta}{2}\left\|\delta_x^+ u^{(m)}\right\|_2^2 + \frac{\gamma}{2}\left\|\delta_{\mathrm{FD}}^{-1} u^{(m)}\right\|_2^2$$

に対応する $\|\cdot\|_X$ の選択と議論の工夫により，(a) 空間微分の次数による困難には対処できるが，(b) 非線形性による困難への対処には，有界性仮定が必要になる．

直接的な議論での証明には sup 有界性 $\|u^{(m)}\|_\infty := \sup_k \left|u_k^{(m)}\right| < \infty$ の仮定が必要だが，Zakharov 方程式系や連続版 Ostrovsky 方程式での議論を参考にして，L^2 有界性 $\|u^{(m)}\|_2 < \infty$ の仮定にまで緩和できた．

しかし，この L^2 有界性が実際に成立することを示す目処は立っていないのが現状である．

4　数値実験

Zakharov 方程式系の数値実験では，前章で述べた Glassey のスキーム (G) と DVDM によるスキーム (D) を比較した．

ここで，(G) は Zakharov 方程式系の特殊性に適応しており，陰的線形のため高速で解けるが，元の方程式系のエネルギー $\mathcal{E}(t)$ に対応する保存量

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathrm{G}}^{(m+1)} := \left\|\delta_x^+ E^{(m+1)}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\langle N^{(m+1)} + N^{(m)}, \left|E^{(m+1)}\right|^2\right\rangle \\ + \frac{1}{4}\left(\left\|N^{(m+1)}\right\|^2 + \left\|N^{(m)}\right\|^2\right) + \frac{1}{2}\left\|\delta_x^+ V^{(m)}\right\|^2\end{aligned}$$

が時間に関して非整合的な点が懸念される．対して (D) は，一般手法 DVDM の適用により得られる陰的非線形スキームであり，(G) に比べて計算は遅いが，保存量

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathrm{D}}^{(m)} := \left\|\delta_x^+ E^{(m)}\right\|^2 + \left\langle N^{(m)}, \left|E^{(m)}\right|^2\right\rangle \\ + \frac{1}{2}\left(\left\|N^{(m)}\right\|^2 + \left\|\delta_x^+ V^{(m)}\right\|^2\right).\end{aligned}$$

は時間に関して整合的なものである．構造保存解法の精度の根本である保存量を厳密に保存できる (D) の方が，精度では優れることが期待される．

疎行列を利用した高速な実装の下，いくつかの状況で数値実験を行ったところ，(G) の実行時間は (D) の約 10 倍であった．同条件下での精度では (D) の方が若干優れるが，実行時間の差を覆すほどではなかったため，多くの状況では (G) が優位だといえる．

しかし，(G) はエネルギーの保存精度で (D) に劣るため，長時間の数値実験においての安定性では (D) の優位性が見られた．ある設定の実験結果の図 1 は顕著な例である．この場合，特に成分 E について，(G) の精度は時間経過とともに加速度的に悪化しており，実行時間の不利を (D) が覆しうる結果となっている．

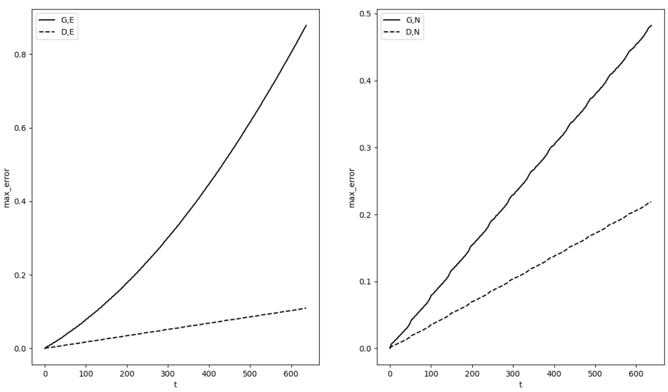

図 1.

参考文献

[1] D. Furihata and T. Matsuo. Discrete Variational Derivative Method–A Structure-preserving Numerical Method for Partial Differential Equations, CRC Press, Boca Raton, 2011.

[2] Y. Miyatake, T. Matsuo and D. Furihata, Invariants-preserving integration of the modified Camassa–Holm equation, Jpn. J. Ind. Appl. Math., **28.3** (2011), 351–381.

[3] R. T. Glassey, Convergence of an energy-preserving scheme for the Zakharov equations in one space dimension, Math. Comput., **58.197** (1992), 83–102.

[4] T. Yaguchi, T. Matsuo and M. Sugihara, Conservative numerical schemes for the Ostrovsky equation, J. Comput. Appl. Math., **234** (2010), 1036–1048.