修士論文 要旨

一様ハイパーグラフの抽象剛性マトロイド

数理情報学専攻 48-216226　東田 瑞己
指導教員　谷川 眞一 准教授

1　はじめに

抽象剛性マトロイド [2] は完全グラフの辺集合上のマトロイドの族であり，グラフ剛性の組合せ的な考察において重要な役割を果たしてきた．本研究では [4] によるグラフの抽象剛性の特徴付けに基づき，この概念の一様ハイパーグラフへの拡張を提案する．特に，グラフ剛性マトロイドの一般化であるスケルタル剛性マトロイド [3, 5, 7] と多変数スプラインの次元解析の際に考案されたコファクターマトロイド [1, 7] が共に抽象剛性マトロイドの例に含まれることを確認し，その上で 2 者の組合せ的な類似点と相違点について考察を行う．

2　背景

無向グラフ G が d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ で直線的に描かれているとする．G の構造および G に含まれる辺の長さの情報だけから，任意の 2 頂点間の距離を一意に復元することは可能だろうか．グラフ剛性とは，真のグラフ描画近傍に探索範囲を制限した状況下における，距離の復元一意性を記述する概念である．

剛性マトロイドは線形マトロイドの一種であり，グラフ剛性の解析で重要な役割を果たす．ここで，マトロイドは線形独立性を公理化した離散構造であり，台集合 S とその部分集合族 $\mathcal{I}$ の組 $(S,\mathcal{I})$ からなる．$\mathcal{I}$ の要素を独立集合と呼ぶ．特にある行列の行（あるいは列）の線形独立性で表現可能なマトロイドを線形マトロイドと呼ぶ．グラフ剛性はマトロイドに付随する閉包作用素を用いた端的な表現が知られている．抽象剛性マトロイドは n 頂点完全グラフ K_n の辺集合 $E(K_n)$ 上のマトロイドからなる族であり，剛性マトロイドにおける辺集合の貼り合わせと剛性との関係を，閉包作用素を用いて公理化することで得られる．

定義 1 ([2])　d を正の整数とする．$E(K_n)$ 上のマトロイド $\mathcal{M}$ が以下の 2 条件を満たすとき，$\mathcal{M}$ を抽象 d 剛性マトロイドと呼ぶ．ただし $\mathrm{cl}(\cdot)$ は $\mathcal{M}$ の閉包作用素であり，また $W \subseteq E(K_n)$ に対し $K(V(W))$ で W の端点全体を頂点集合とする完全部分グラフを表す．

(Q1)　$X, Y \subseteq E(K_n)$, $|V(X) \cap V(Y)| < d$
$\Rightarrow \mathrm{cl}(X \cup Y) \subseteq K(V(X)) \cup K(V(Y))$.

(Q2)　$X, Y \subseteq E(K_n)$, $|V(X) \cap V(Y)| \geq d$,
$\mathrm{cl}(X) = K(V(X))$, $\mathrm{cl}(Y) = K(V(Y))$
$\Rightarrow \mathrm{cl}(X \cup Y) = K(V(X \cup Y))$.

抽象剛性マトロイドは剛性マトロイドの他に，コファクターマトロイドと呼ばれる，2 次元領域の多角形分割上で区分的に滑らかな多項式関数（スプラインと呼ぶ）から定まる線形マトロイドを重要な例として含む．グラフの抽象剛性マトロイドには [4] によって整理された特徴づけが存在する．スペースの都合で詳細は省略するが，この特徴付けはランク，サーキット，コサーキットといったマトロイドに付随する概念を用いた条件 (R1), (R2), (R3), および 0-extension と呼ばれるグラフ操作に関する条件 (R4) の組合せで構成される．

スケルタル剛性はグラフ剛性の概念の単体複体への拡張である．理論的な基盤は [3, 5] 等によって整備され，主に多面体論の課題解決に利用されてきた．スケルタル剛性マトロイドはこの文脈で考案されたマトロイドであり，剛性マトロイドのハイパーグラフ拡張に相当する．一方で，コファクターマトロイドについては，スプラインを定義する多角形分割を多面体分割へと次元を上げることで，自然にハイパーグラフ拡張が得られる．Whiteley [7] はスケルタル剛性マトロイドの解析を通じ，公理 (Q1), (Q2) の拡張によって一様ハイパーグラフ上の抽象剛性マトロイドを定義しようと試みた．しかし，閉包作用素とスケルタル剛性とがグラフの場合のようには一致しないことから，この方法での拡張は困難であると主張した [7].

3　本研究の貢献

本研究では条件 (Q1), (Q2) の拡張のかわりに，[4] によるグラフの抽象剛性の特徴づけで用いる 4 条件 (R1)〜(R4) のハイパーグラフ拡張をそれぞれ考案し，グラフの場合と同様の等価性が成立することを示した．準備として記法をいくつか導入する．K_n^r で n 頂点完全 r 一様ハイパーグラフを表す．完全グラフ K_n は $r = 2$ の場合に相当する．また，$\rho \in K_n^{r-1}$ に対し $\mathrm{star}(\rho; K_n^r) \coloneqq \{\sigma \in K_n^{r-1} \mid \rho \subset \sigma\}$ と定義する．K_n^r のハイパー辺部分集合 X, および X のどのハイパー辺にも含まれない K_n^{r-1} のハイパー辺 ρ に対し，X の

k-valent 0-extension X' は $X' \coloneqq X \cup \{\rho v_1, \dots \rho v_k\}$ で定義される K_n^r のハイパー辺集合である．ただし，$v_1, \dots, v_k$ は X に現れるが ρ には現れない頂点とする．

定理 2 (等価性定理) n, d, r を $r \geq 2$, $d \geq r-1$, $n \geq d+2$ を満たす整数とする．K_n^r のハイパー辺集合 $\binom{[n]}{r}$ を台集合とするマトロイド $\mathcal{M}$ に対し以下の 4 条件を考える (ただし $\delta \coloneqq d-r+2$).

(R1) $\mathrm{rank}(K_n^r) = \binom{n}{r} - \binom{n-\delta}{r}$.

(R2) K_{d+2}^r に同型な任意の部分ハイパーグラフは $\mathcal{M}$ のサーキットである．

(R3) 任意の $\rho \in K_n^{r-1}$ に対し $\mathrm{star}(\rho; K_n^r)\,(\rho \in K_n^{r-1})$ から任意に $\delta - 1$ 個の r ハイパー辺を除去した部分ハイパーグラフは $\mathcal{M}$ のコサーキットである．

(R4) $\mathcal{M}$ の任意の独立集合 X の δ-valnet 0-extension は常に $\mathcal{M}$ の独立集合である．

このとき，以下が成立する：

$$\begin{aligned}&(\mathrm{R1})(\mathrm{R2}) \Leftrightarrow (\mathrm{R1})(\mathrm{R3}) \Leftrightarrow (\mathrm{R1})(\mathrm{R4})\\ &\Leftrightarrow (\mathrm{R2})(\mathrm{R3}) \Leftrightarrow (\mathrm{R2})(\mathrm{R4}).\end{aligned}$$

等価性定理 2 により，抽象剛性マトロイドの一様ハイパーグラフ拡張を得る．

定義 3 $r \geq 2$, $d \geq r-1$, $n \geq d+2$ とする．K_n^r のハイパー辺集合上のマトロイド $\mathcal{M}$ が抽象 d 剛性マトロイドであるとは，$\mathcal{M}$ が等価性定理 2 の条件の組合せの 5 パターンのうち，いずれか 1 つを満たすことと定義する．

スケルタル剛性マトロイド $\mathcal{R}_d(K_n^r)\,(r \geq 2, d \geq r-1)$ は一般的 (generic) な点配置 $\tilde{\mathbf{p}} \in (\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\})^n$ に対する剛性行列 $R_d(K_n^r; \tilde{\mathbf{p}})$ が定める線形マトロイドであり，抽象 d 剛性マトロイドの例である．実際，$\mathcal{R}_d(K_n^r)$ はランク条件 (R1) を満たし [6], また行列 $R_d(K_n^r; \tilde{\mathbf{p}})$ を直接解析することで 0-extension 条件 (R4) も確認できる．コファクターマトロイド $\mathcal{C}_s^{s-1}(K_n^r)$ (s は非負整数) はコファクター行列 $C_s^{s-1}(K_n^r; \tilde{\mathbf{p}})$ が定める線形マトロイドである（ただし点配置 $\tilde{\mathbf{p}} \in (\mathbb{R}^{r+1} \setminus \{0\})^n$ は一般的）．$d = s+r-1$ として条件 (R2), (R4) を確かめることで $\mathcal{C}_s^{s-1}(K_n^r)$ が抽象 d 剛性マトロイドであることが分かる．条件 (R4) は同様にコファクター行列の解析から従う．サーキット条件 (R2) の確認に使うのが，次に述べる錐化定理（定理 4）である．錐化定理は $\mathcal{R}_d(K_n^r)$ [6] および $\mathcal{C}_s^{s-1}(K_n)$（グラフ版）[7] での成立が知られていて，$\mathcal{C}_s^{s-1}(K_n^r)$（ハイパーグラフ版）でも成り立つと予想されていた [7] が，定理 4 はこれを肯定的に解決する．

定理 4 (錐化定理) $s \geq 0$, $r \geq 2$, $n \geq r$ とする．$X \subseteq K_n^r$ および X に現れない頂点 a に対し，$X * \{a\} \coloneqq X \cup \{\rho a \mid |\rho| = r-1$ かつ $\exists \sigma \in X, \rho \subset \sigma\}$ と定義する (X の錐)．このとき，

X が $\mathcal{C}_s^{s-1}(K_n^r)$ で独立 $\Leftrightarrow$ $X * \{a\}$ が $\mathcal{C}_{s+1}^{s}(K_n^r)$ で独立.

[7] において，スケルタル剛性マトロイド $\mathcal{R}_{s+r-1}(K_n^r)$ は $s=2$ ではコファクターマトロイド $\mathcal{C}_s^{s-1}(K_n^r)$ に一致し，$s \geq 3$ では $\mathcal{C}_s^{s-1}(K_n^r)$ とは一致しないと予想した．次の定理 5 は，$r \in \{3,4,5\}$ についてこの予想の $s=2$ の場合を反証し，また $s \geq 3$ の場合を肯定的に解決する．

定理 5 $r \in \{3,4,5\}$ とする．任意の $s \geq 2$ に対し，n を十分大きくとると $\mathcal{R}_{s+r-1}(K_n^r) \neq \mathcal{C}_s^{s-1}(K_n^r)$.

証明は主に錐化定理 4 を活用し，s に関する数学的帰納法により行う．帰納法の最初のステップにおいて，ある特定の r ハイパーグラフの $\mathcal{C}_2^1(K_n^r)$ における独立性を示す必要があるが，この証明に計算機を利用した（条件 $r \leq 5$ は計算環境のメモリ制約に由来する）．任意の r で適用可能な証明手法を見出すことは今後の課題である．

参考文献

[1] L. J. Billera. Homology of smooth splines: Generic triangulations and a conjecture of Strang. *Transactions of the American Mathematical Society*, 310(1):325–340, 1988.

[2] J. E. Graver. Rigidity matroids. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 4(3):355–368, 1991.

[3] C. W. Lee. P.L.-spheres, convex polytopes, and stress. *Discrete & Computational Geometry*, 15(4):389–421, 1996.

[4] V.-H. Nguyen. On abstract rigidity matroids. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 24(2):363–369, 2010.

[5] T.-S. Tay, N. White, and W. Whiteley. Skeletal rigidity of simplicial complexes, I. *European Journal of Combinatorics*, 16(4):381–403, 1995.

[6] T.-S. Tay and W. Whiteley. A homological interpretation of skeletal rigidity. *Advances in Applied Mathematics*, 25(1):102–151, 2000.

[7] W. Whiteley. Some matroids from discrete applied geometry. In J. E. Bonin, J. G. Oxley, and B. Servatius, editors, *Matroid Theory*, volume 197 of *Contemporary Mathematics*, pages 171–312. American Mathematical Society, 1996.