

制限された観測領域上での行列補完問題

数理情報学専攻 48206225

戸田 一汰

指導教員

谷川眞一 准教授

1 はじめに

低ランク行列補完問題とは、ある低ランク行列 $M \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2}$ に対し一部の要素のみがサンプリングされている時にそのサンプリングされている情報のみを用いて元の行列全体を復元できるかを問う問題である。多くの行列補完問題の理論研究では、行列全域から個々の要素が一様かつ独立にサンプリング (一様サンプリング) されることを想定しているが、多くの応用先では一様サンプリングに従わない状況も考えることができる。

本研究では、一様サンプリングでない状況として予め制限された観測領域からサンプリングする場合においても行列分解に基づくアプローチから復元の理論保証が与えられることを示した。特に [3, 2] と同じく目的関数の 1 次と 2 次の最適性条件を満たす解が大域的最適解と一致し、その解として元の行列を復元できることを示した。

2 既存研究

行列補完問題の理論研究の主要なアプローチとして核ノルム最小化問題に基づくもの [1] と行列分解を利用した無制約非凸最適化問題に基づくもの [3, 2] の 2 つが挙げられる。特に一反復あたりの計算コストが小さく、比較的大規模な行列にも適用できることから行列分解に基づくアプローチの研究が近年多く為されている。また解析的には復元対象である行列が半正定値行列である場合の方が扱いやすいことから、半正定値行列補完問題について説明する。

まず [3] での問題設定について説明する。復元対象とする行列 M は大きさ d の半正定値行列で $\text{rank}(M) = r$ とする。このとき、コレスキー分解によりある行列 $Z \in \mathbb{R}^{d \times r}$ が存在し、 $M = ZZ^T$ が成立する。 Z の条件数を κ とおく。また M に対して以下の仮定を設ける。

- スケーリング: $\|Z\|_F = \sqrt{r}$
- インコヒーレンス性: $\|Z_i\| \leq \frac{\mu}{\sqrt{d}} \|Z\|_F$

ただし Z_i は Z の第 i 行ベクトルである。インコヒーレンス性の仮定は行列補完問題の理論研究では良く用いられる仮定であり、復元対象行列に対し値に偏りが生じたりスパースであることを防ぐための仮定である。また

上記の分解は Z に対し直交行列 R を右から作用させた行列 $\bar{Z} = ZR$ に対しても同様の分解ができることから Z の選び方には直交行列分の自由度がある。

観測された領域を Ω で表す。行列分解に基づく行列補完問題の理論研究では、 Ω は復元対象行列 M の全域から個々の要素が独立に確率 p でサンプリングされることを想定している。このサンプリング方法は一様サンプリングと呼ばれる。

観測された情報を元に構成される次の無制約非凸最適化問題を解くことで復元対象行列 M の復元を試みる。

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{d \times r}} \frac{1}{2} \sum_{ij \in \Omega} ((XX^T)_{ij} - M_{ij})^2 + \lambda R(X) \quad (1)$$

第一項は観測された領域 Ω 上での復元対象行列 M との二乗誤差を表す項であり、以降では $h_\Omega(X)$ と表記する。第二項 $R(X)$ は正則化項であり

$$R(X) = \sum_{i=1}^d (\max\{\|X_i\| - \alpha, 0\})^4$$

で定義され、変数行列の各行ベクトルのノルムに対し閾値 α を超えるとペナルティを与える項である。特に正則化パラメータである α と λ は具体的に $\alpha = 32\mu\kappa r/\sqrt{d}$, $\lambda \geq \mu^2 rp/\alpha^2$ と設定されているとする。

上記の設定の下、[3] では最適化問題 (1) を解くことで復元が与えられることを示した。

定理 1. ([3]). サンプリング確率 p が $p = \Omega(\frac{\mu^4 \kappa^{16} r^7 \log^2 d}{d})$ を満たすとする。このとき高確率で、目的関数の 1 次と 2 次の最適性条件を満たす任意の解 X は大域的最適解であり $XX^T = M$ が成り立つ。

3 本研究：制限された観測領域上での行列補完問題

核ノルム最小化問題に基づくアプローチ [1] では、一様サンプリング以外を想定した研究 [5] もある一方で、行列分解に基づく既存研究では、一様サンプリングを想定したものしか調査の限り見受けられない。そこで本研究では予め観測可能な領域が制限されており、その領域上から値がサンプリングされる場合を扱う。

まず問題設定を整理する. 予め制限された領域が無向グラフ $([d], E)$ の辺集合として与えられているものとする. E の個々の要素を確率 p でサンプリングして得られる観測領域を E_p と表す. 復元対象とする行列は [3] と同じ条件を満たしているものとする. このとき, [3] と同じ最適化問題 (1) を解くことで復元対象である行列 M を高確率で復元できることを示した.

定理 2. ある定数 $C_1 > 0$ が存在し,

- $|E^c| \leq 8dr \log d$
- $\lambda_{(r)_2+1}(\nabla^2 h_E(Z)) > 0$
- $\max\{C_1 \frac{\mu^6 \kappa^{16} r^7 \log^2 d}{d}, 18 \frac{\sigma_{\min}(Z)^2}{\lambda_{(r)_2+1}(\nabla^2 h_E(Z))}\} \leq p$

を満たすとする. このとき, 高確率で目的関数の 1 次と 2 次の最適性条件を満たす解 X は $XX^T = M$ を満たす.

ただし行列 A に対し $\lambda_i(A)$ で i 番目に小さい固有値を表すものとする. 行列 A に対し $\sigma_{\min}(A)$ で最小特異値を表すものとする. 定理 2 の証明は 3 ステップから構成される. まずステップ 1 として目的関数の定義域全域における解析 (補題 1) を説明する.

補題 1. 定理 2 の設定の下では, 高確率で, 目的関数の 1 次と 2 次の最適性条件を満たす解 X は

$$\|X - Z_X^*\|_F \leq \sigma_{\min}(Z) \quad (2)$$

を満たす.

ただし $\mathcal{O}(Z) = \{ZR \mid R : \text{直交行列}\}$ 及び $Z_X^* = \operatorname{argmin}_{\bar{Z} \in \mathcal{O}(Z)} \|X - \bar{Z}\|_F$ と定義する. 補題 1 は [3] の解析を拡張したものであり, 幾つかの集中不等式を組み合わせることで示すことができるが, 証明はテクニカルであるため省略する. 補題 1 により 1 次と 2 次の最適性条件を満たすとき, $\mathcal{O}(Z)$ の十分近傍に属していることが保証される. 特に実は $\mathcal{O}(Z)$ の十分近傍では任意の停留点は大域的最適解と一致することがステップ 2 で保証される.

次にステップ 2 として $\mathcal{O}(Z)$ の近傍における目的関数の解析 (補題 2) を説明する.

補題 2. 定理 2 の設定の下では, 高確率で,

$$\|X - Z_X^*\|_F \leq \min\left\{\sqrt{\frac{p}{18} \lambda_{(r)_2+1}(\nabla^2 h_E(Z))}, \alpha - \frac{\mu\sqrt{r}}{\sqrt{d}}\right\} \quad (3)$$

を満たす任意の停留点 X は Z_X^* と一致する. つまり

$XX^T = M$ が成立する.

補題 2 では, まず $\mathcal{O}(Z)$ の近傍では正則化項は恒等的に 0 になることから目的関数は恒等的に h_{E_p} と一致することに着目する. 従って h_{E_p} の停留点の位置を具体的に見積もることで補題 2 を示すことができる. h_{E_p} はグラフ剛性理論で現れるエネルギー関数 [4] と形状が似ていることから, エネルギー関数が正となる領域を見積もる [4] での解析方法と近い議論をすることで h_{E_p} の停留点の位置を具体的に見積もることができ, 補題 2 を示すことができる.

最後にステップ 3 では, 定理 2 のサンプリング確率の設定の下では

$$\sigma_{\min}(Z) \leq \min\left\{\sqrt{\frac{p}{18} \lambda_{(r)_2+1}(\nabla^2 h_E(Z))}, \alpha - \frac{\mu\sqrt{r}}{\sqrt{d}}\right\} \quad (4)$$

が成り立つことが言えるため, 補題 1 と補題 2 を合わせることができ, 定理 2 を示すことができる.

4 結論

行列分解に基づく枠組みの下, 非一様サンプリングとして予め制限された観測領域からサンプリングを行う場合を扱った. このサンプリング方法でも, 高確率で, 目的関数の 1 次と 2 次の最適性条件を満たす解が大域的最適解と一致することを示した. 主定理の証明では, 定義域全域における解析と大域的最適解の近傍における解析の 2 段階に分けて解析を行った.

参考文献

- [1] Emmanuel Candès and Benjamin Recht. Exact matrix completion via convex optimization. *Commun. ACM*, Vol. 55, No. 6, pp. 111 – 119, 2012.
- [2] Rong Ge, Chi Jin, and Yi Zheng. No spurious local minima in nonconvex low rank problems: A unified geometric analysis. In *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning - Volume 70*, ICML'17, pp. 1233 – 1242, 2017.
- [3] Rong Ge, Jason D Lee, and Tengyu Ma. Matrix completion has no spurious local minimum. In D. Lee, M. Sugiyama, U. Luxburg, I. Guyon, and R. Garnett, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol. 29, 2016.
- [4] Miranda Holmes-Cerfon, Louis Theran, and Steven J. Gortler. Almost-rigidity of frameworks, 2020.
- [5] Guangcan Liu, Qingshan Liu, Xiao-Tong Yuan, and Meng Wang. Matrix completion with deterministic sampling: Theories and methods. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 43, No. 2, pp. 549 – 566, 2021.