修士論文 要旨

構造化ディスクリプターシステムの最小可制御性問題

数理情報学専攻 48-206224　寺崎 峻
指導教員　佐藤 一宏 講師

1　はじめに

電力網や神経ネットワークなどのような，大規模ネットワークシステムに対する制御理論が近年注目されている．その中でも，状態間の作用を有向グラフで表現する構造化システムに対する研究が広く行われている．特に，最小可制御性問題は最小の入力数で構造化システムを構造可制御にする問題であり，効率的な解法が提案されている [1,3].

本研究では，2 種類の最小可制御性問題を構造化ディスクリプターシステムに拡張し，1 つは NP 困難な問題であることを示した．さらに，もう 1 つの問題に入力制約を導入し，最適解が存在するための条件及び最適解を求める効率的なアルゴリズムを構成した．

2　準備

2.1　ディスクリプターシステム

本研究では，ディスクリプターシステムと呼ばれる微分代数方程式

$$F\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

を考える．ただし，$F, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ である．微分代数方程式に一意な解が存在するとき，式 (1) は可解であるという．システムの可解性及び可制御性は以下の命題によって判定可能である．

命題 1 (可解性 [4])**.** ディスクリプターシステム (1) が可解であるための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}(A - sF) = n \tag{2}$$

がある $s \in \mathbb{C}$ に対して成り立つことである．

定義 2 (可制御性)**.** 許容な初期条件を満たす $x^* \in \mathbb{R}^n$ に対して，ある入力 $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ と時刻 $T \geq 0$ が存在して，$x(T) = x^*$ となるとき，ディスクリプターシステム (1) は可制御であるという．

命題 3 (可制御性 [4])**.** ディスクリプターシステム (1) が可制御であるための必要十分条件は，

$$\mathrm{rank}\,[A - zF \mid B] = n \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \tag{3}$$

である．行列 $D(s) = [A - sF \mid B]$ はモーダル可制御行列と呼ばれる．

2.2　構造化ディスクリプターシステム

ディスクリプターシステムの F, A, B が一般行列として与えられるとき，式 (1) を構造化ディスクリプターシステムという．構造化ディスクリプターシステムに対する構造可解性と構造可制御性は，それぞれ式 (2), 式 (3) が一般ランクの意味で成り立つこととして定義する．一般行列とそのランクについての詳細は [2] を参照されたい．

構造化ディスクリプターシステム (1) 及びその構造可制御性を効率的に判定するために，二部グラフ及びその DM 分解を用いた解析 [2] が知られている．構造化ディスクリプターシステム (1) に対応する二部グラフ $G = (V^+, V^-; E)$ は以下のように定義される;

$$\begin{cases} V^+ := X \cup U, \quad V^- := \{e_1, \ldots, e_n\}, \\ E := E_A \cup E_F \cup E_B \end{cases}$$

ここで $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ は状態頂点集合，$U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ は入力頂点集合，$E_A := \{(e_j, x_i) \mid A_{ij} \neq 0\}$, $E_F := \{(e_j, x_i) \mid F_{ij} \neq 0\}$, $E_B = \{(e_j, u_i) \mid B_{ij} \neq 0\}$ であり，E_F に属す辺を s-辺と呼ぶ．$e_i \in V^-$ は方程式頂点であり，ディスクリプターシステム (1) の第 i 行目の方程式に対応している．二部グラフ G の DM 分解を考え，部分グラフ G_k $(k = 0, \ldots, b, \infty)$ を G の DM 成分とする．G_k $(k = 1, \ldots, b)$ は整合成分，G_0 と G_∞ は不整合成分と呼ぶ．また，$\nu(G)$ を G の最大マッチングのサイズとする．さらに，G の重要な部分グラフとして，$G_A = (X, V^-; E_A)$, $G_{A-sF} = (X, V^-; E_A \cup E_F)$, $G_{[A|B]} = (X, V^-; E_A \cup E_B)$ を定義する．このとき，構造化ディスクリプターシステム (1) の構造可制御性は，以下によって特徴づけられる．

命題 4 (構造可制御性 [2])**.** 構造化ディスクリプターシステム (1) が構造可制御であるための必要十分条件は，

1) $\nu(G_{A-sF}) = n$
2) $\nu(G_{[A|B]}) = n$
3) G のすべての整合成分は s-辺を含まない

3　最小可制御性問題 (MCP)

以降では，入力ゲイン B が未知の構造化ディスクリプターシステム $F\dot{x}(t) = Ax(t)$ を考え，システム

(F, A) は構造可解性を満たすと仮定する．いま，$R = \{e_1, \ldots, e_n\}$ を方程式の添字集合とし，$\mathcal{F}$ を R の部分集合とする．$\mathcal{F}$ が要素 e_i を持つとき，ディスクリプターシステム (1) の第 e_i 行目の方程式には入力できないことを意味する．この $\mathcal{F}$ を禁止方程式集合，$e_i \in \mathcal{F}$ を禁止方程式と呼ぶ．このとき，ディスクリプターシステム (F, A) に対する入力制約付き MCP0 及び MCP1 は次のように定式化される:

(制約付き MCP0)

$$\begin{cases} \underset{B \in \mathcal{G}^{n \times m}}{\text{minimize}} & m \\ \text{subject to} & \text{システム } (F, A, B) \text{ は構造可制御,} \\ & B \text{ の } f_i \in \mathcal{F} \text{ 行目は全て } 0 \text{ ベクトル} \end{cases}$$

(MCP1)

$$\begin{cases} \underset{b \in \mathcal{G}^{n}}{\text{minimize}} & \|b\|_0 \\ \text{subject to} & \text{システム } (F, A, B = \mathrm{diag}(b)) \text{ は構造可制御} \end{cases}$$

ただし，$\mathcal{G}^{n \times m}$ は $n \times m$ の一般行列全体の集合を表し，$\|b\|_0$ は b の非ゼロ要素数を表す．MCP0 と MCP1 の違いはその入力ゲイン B の制約の違いに現れている．具体的には，MCP0 では各入力頂点が複数の状態頂点に接続可能であるのに対して，MCP1 では各入力頂点はただ一つの状態頂点にしか接続することができない．

3.1 制約付き MCP0 に対する結果

制約付き MCP0 に最適解が存在するための必要十分条件は以下で与えられる．

定理 5. 構造化ディスクリプターシステム (F, A) は可解性の仮定 (2) を満たすとする．このとき，制約付き MCP0 に最適解が存在するための必要十分条件は以下の条件が同時に成り立つことである．

a). G_{A-sF} の任意の極大整合 s 成分 G_i の頂点集合 V_i に対して，ある $e \in V_i \cap V^-$ が存在し $e \notin \mathcal{F}$.

b). 次の最適化問題

$$\begin{cases} \text{maximize} & |M| \\ \text{subject to} & M \text{ は } G_A \text{ のマッチング,} \\ & \mathcal{F} \subseteq \partial^- M \end{cases} \tag{4}$$

が実行可能．ただし $G_A = (X, V^-; E_A)$ である．

ここで，G_{A-sF} の極大整合 s 成分とは，s-辺を持つ整合成分の中で DM 分解の意味で極大なものである．

問題 (4) の最適解を用いることで，制約付き MCP0 の最適値を計算することが可能である．

定理 6. 構造化ディスクリプターシステム (F, A) は可解性の仮定 (2) を満たし，制約付き MCP0 の最適解が存在すると仮定する．このとき，問題 (4) の最適値を m^* とすると，制約付き MCP0 の最適値 n_D との間に以下の関係式が成り立つ．

$$n_D = \max\{n - m^*, 1\} \tag{5}$$

問題 (4) は交互道アルゴリズムにより最適解を求めることが可能である．また，Algorithm 1 に示すように，問題 (4) の最適解及び G_{A-sF} の DM 分解を用いることで制約付き MCP0 の最適解を構成できる．

Algorithm 1 制約付き MCP0 に対するアルゴリズム

if 定理 5 の条件 a) が満たされない **then**
  制約付き MCP0 は実行不可能.
end if
問題 (4) の最適解を M^* とする (存在しない場合，実行不可能).
入力頂点集合 $U := \{u_1, \ldots, u_{n_D}\}$ の各入力頂点に各方程式頂点 $V^- \setminus \partial^- M^*$ を接続する．ただし n_D は定理 6 の式 (5) で与えられる．
G_{A-sF} の極大整合 s 成分の $\mathcal{F}$ に属していない方程式頂点と U を接続する．

定理 7. Algorithm 1 は制約付き MCP0 の最適解を出力し，その時間計算量は $O(|V| + |E|\sqrt{|V|})$ である．

3.2 MCP1 に対する結果

集合被覆問題のインスタンスを MCP1 に帰着させることにより，以下の結果を得る．

定理 8. 構造化ディスクリプターシステム (F, A) は可解性の仮定 (2) を満たすとする．このとき構造化ディスクリプターシステム (F, A) に対する MCP1 は NP 困難である．

参考文献

[1] Yang-Yu Liu, Jean-Jacques Slotine, and Albert-László Barabási. Controllability of complex networks. *nature*, Vol. 473, No. 7346, pp. 167–173, 2011.

[2] Kazuo Murota. *Matrices and matroids for systems analysis*. Springer Science & Business Media, 2009.

[3] Alex Olshevsky. Minimum input selection for structural controllability. In *2015 IEEE American Control Conference (ACC)*, pp. 2218–2223, 2015.

[4] 池田雅夫. Descriptor 形式に基づくシステム理論. 計測と制御, Vol. 24, No. 7, pp. 597–604, 1985.