

トポロジー最適化問題に対する加速射影勾配法

数理情報学専攻 48206226

西岡 暁

指導教員

寒野 善博 教授

1 はじめに

トポロジー最適化は、目的に応じて構造物の最適な形状を求める設計手法である。トポロジー最適化問題は、大規模な制約付き非凸最適化問題として定式化できる。大規模な最適化問題では、内点法や逐次2次計画法などの汎用の非線形最適化法は、1反復あたりの計算コストが膨大になってしまうため、実用的でない。そのためトポロジー最適化分野では、これまで最適性基準法 [2] や MMA (method of moving asymptotes) [7] などの特有の最適化アルゴリズムが盛んに用いられてきた。しかし、これらの手法は反復を重ねても最適性の尺度が十分小さくならず、収束が遅いなどの難点がある。

本研究では、加速射影勾配法によってトポロジー最適化問題を解く手法を提案する。いくつかのトポロジー最適化問題の実行可能領域への射影が効率的に計算できることを示し、トポロジー最適化問題の性質を考慮したステップサイズの決定法を提案する。また、アルゴリズムの大域的収束性が保証される条件について述べる。提案手法は、大規模な問題でも1反復あたりの計算コストが小さく、パラメータ調整の必要性が少なく、実装も容易である。数値実験では、多くの問題例で提案手法がトポロジー最適化の既存手法より高速に最適性が高い解を得ることを示す。

2 トポロジー最適化問題

トポロジー最適化の研究は、1988年の Bendsoe & Kikuchi [2] の論文を契機としており、現在では幅広い分野に応用が拡大している。以下では、代表的な問題であるコンプライアンス最小化問題を例にとってトポロジー最適化問題を説明する。コンプライアンス最小化問題は、図1に示されるように、与えられた荷重 \mathbf{p} に対して最も剛性が高い（最も変形が小さい）形状を求める問題である。

コンプライアンス最小化問題は次のように表される [1] :

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimize}} && \mathbf{p}^T (K(H\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{p} \\ & \text{subject to} && \mathbf{1}^T H\mathbf{x} - V_0 = 0, \\ & && \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (1)$$

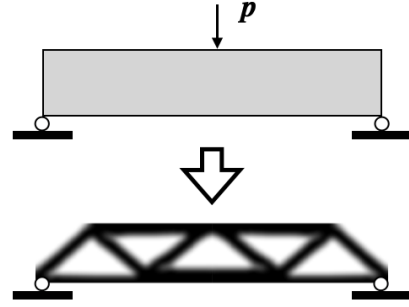


図1. コンプライアンス最小化問題

ここで、 \mathbf{x} は密度ベクトルとよばれる形状を表現する変数、 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ は荷重ベクトルとよばれる定ベクトル、 $K(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ は剛性行列、 $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ はフィルタリングとよばれる作用に対応する定行列、 $V_0 > 0$ は体積の上限値を表す定数である。剛性行列 $K(\mathbf{x})$ は $E_0 \gg E_{\min} > 0$ を定数、 K_e を定行列として $K(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^n [E_{\min} + (E_0 - E_{\min})x_e^3] K_e$ と表される。

トポロジー最適化問題は、問題が大規模、非凸であることに加えて、各反復で目的関数値と勾配を計算するために1次方程式の求解（有限要素解析）が必要であるため計算コストが大きい。

3 加速射影勾配法

加速射影勾配法にはいくつかの種類があるが、本研究では主に Ocsh et al. の iPiano [6] を用いる。この手法は、通常の射影勾配法と比較したときの理論的な収束レートの改善がないため、厳密には加速射影勾配法ではない。しかし、[4, 5] などの加速射影勾配法と異なり補助変数が用いられないため、各反復で有限要素解析を追加で行う必要がなく、トポロジー最適化問題に適している。

目的関数を f 、実行可能領域を S とおくと、iPianoの更新式は以下ようになる：

$$\mathbf{x}^{k+1} = \Pi_S(\mathbf{x}^k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}^k) + \beta_k (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})). \quad (2)$$

ただし、 $\Pi_S : \mathbb{R}^n \rightarrow S$ は実行可能領域 S への射影、 $\alpha_k > 0$ はステップサイズ、 $\beta_k \geq 0$ はモーメントムパラメータである。パラメータの詳細は [6] もしくは発表スライドの付録を参照されたい。

4 射影の計算

コンプライアンス最小化問題 (1) の実行可能領域は、 $\mathbf{v} = H^T \mathbf{1}$ として

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}^T \mathbf{x} - V_0 = 0, \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}\} \quad (3)$$

と表される。まず

$$\mathbf{x}(\mu) := \max\{\mathbf{0}, \min\{\mathbf{1}, \mathbf{w} - \mu \mathbf{v}\}\} \quad (4)$$

とおく。ただし、演算 $\max\{\cdot, \cdot\}$ および $\min\{\cdot, \cdot\}$ はベクトルの各成分に対して個別に行う。 $\mathbf{x}(\mu)$ が体積制約 $\mathbf{v}^T \mathbf{x}(\mu^*) = V_0$ を満たすような μ^* は区間

$$[\min\{w_1/v_1, \dots, w_n/v_n\} - 1, \max\{w_1/v_1, \dots, w_n/v_n\}] \quad (5)$$

に存在し、そのような μ^* を用いて、点 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ の実行可能領域 S への射影は

$$\Pi_S(\mathbf{w}) = \mathbf{x}(\mu^*) \quad (6)$$

と表される。 μ^* は 2 分法により求めることができるため、射影は効率的に計算できる。コンプライアントメカニズム問題と呼ばれるトポロジー最適化問題では、実行可能領域は

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}^T \mathbf{x} - V_0 \leq 0, \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}\} \quad (7)$$

となるが、この場合も同様に 2 分法により効率的に計算できる。

5 ステップサイズ

iPiano は、各反復で降下条件 (descent condition)

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) \leq f(\mathbf{x}^k) + \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k \rangle + \frac{L_k}{2} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \quad (8)$$

が満たされるような L_k を用いてステップサイズ α_k および β_k を決定すれば、大域的収束性が保証される。通常はバックトラッキングとよばれる手法を用いて L_k を求めるが、目的関数値の評価を何度も行うため、トポロジー最適化問題では有限要素解析の回数が増えてしまい計算コストが大きくなる。そのため、本研究では、

$$L_k = \max \left\{ L_{\min}, \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}^k) - \nabla f(\mathbf{x}^{k-1})\|}{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|} \right\} \quad (9)$$

を用いたステップサイズの決定法を提案する。ただし、 $L_{\min} > 0$ は十分小さい定数であり、 $L_0 > 0$ は十分大きい値とする。式 (9) が降下条件 (8) を満たさない場合は通常のバックトラッキングと同様に降下条件を満たす

ように調整を行えば大域的収束性が保証される。ただし、数値実験ではほとんどの場合に式 (9) が降下条件を満たしたため、追加で有限要素解析を行う必要がなく計算コストを削減することができた。

6 数値実験

本研究では、コンプライアンス最小化問題、熱伝導問題、コンプライアントメカニズム問題の 3 つの基本的なトポロジー最適化問題を扱う [1, 3]。既存手法として最適性基準法 [2]、GCMMA (globally convergent version of method of moving asymptotes) [8] および汎用非線形最適化ソルバである MATLAB fmincon の内点法・逐次 2 次計画法と、提案手法を比較する。数値実験によって、内点法および逐次 2 次計画法は、問題が大規模になると 1 反復あたりの計算時間が膨大になり実用的でないことを示す。また、最適性基準法と GCMMA は、提案手法と比べて最適性の尺度が十分小さくならず、停止基準が満たされるまでに時間がかかってしまうことを示す。提案手法は、多くの問題例で既存手法よりも高速に最適性が高い解が得られ、大規模な問題でも実用的な時間で解が得られることが期待される。

参考文献

- [1] E. Andreassen, A. Clausen, M. Schevenels, B. S. Lazarov, and O. Sigmund. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **43**(1):1–16, 2011.
- [2] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71**(2):197–224, 1988.
- [3] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications (2nd ed.)*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [4] S. Ghadimi and G. Lan. Accelerated gradient methods for nonconvex nonlinear and stochastic programming. *Mathematical Programming*, **156**:59–99, 2016.
- [5] H. Li and Z. Lin. Accelerated proximal gradient methods for nonconvex programming. *Advances in Neural Information Processing Systems*, **28**:379–387, 2015.
- [6] P. Ochs, Y. Chen, T. Brox, and T. Pock. iPiano: inertial proximal algorithm for nonconvex optimization. *SIAM Journal on Imaging Science*, **7**(2):1388–1419, 2014.
- [7] K. Svanberg. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**(2):359–373, 1987.
- [8] K. Svanberg. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. *SIAM Journal on Optimization*, **12**(2):555–573, 2002.