Supermodular Extension of Vizing's Edge-Coloring Theorem (Vizingの辺彩色定理の優モジュラ的拡張)

数理情報学専攻 48206237 水谷 隆平
指導教員 岩田 覚 教授

1 はじめに

グラフの辺彩色は，グラフ理論・組合せ最適化において古くから研究されてきたトピックであるとともに，工学的にも幅広い応用を持つ重要な分野である．グラフの辺彩色における古典的な結果として，二部グラフに対する Kőnig の定理 [5] と一般のグラフに対する Vizing の定理 [7] が知られている．これらの定理は，Gupta [2, 3] によって辺被覆詰め込みを含む枠組みに拡張されている．Schrijver [6] は，二部グラフに対する Gupta の定理を交叉族・交叉優モジュラ関数の枠組みに拡張した．この結果は，優モジュラ彩色定理とよばれている．

本研究では，まず Vizing の定理の拡張である新しい辺彩色定理を示す．また，この定理を用いることで，一般グラフに対する Gupta の定理にシンプルな別証明を与える．さらに，この新しい辺彩色定理と単一関数版の優モジュラ彩色定理の共通の一般化である，優モジュラ版 Vizing の定理を示す．

2 背景

$G = (V, E)$ を無向グラフとする．G の**辺彩色**とは，隣接する辺が同じ色とならないような各辺の色付けのことである．G の**辺彩色数** $\chi(G)$ とは，G の辺彩色に必要な最小の色数のことである．Kőnig [5] は，二部グラフに対する以下の辺彩色定理を示した．

定理 1 (Kőnig [5])**.** 二部グラフ G に対して，$\chi(G) = \Delta(G)$ が成り立つ．

ここで，$\Delta(G)$ は G の最大次数を表す．同じ頂点に接続する辺は異なる色で塗る必要があるため，任意のグラフ G に対して $\chi(G) \geq \Delta(G)$ が成り立つことに注意する．Vizing [7] は，一般のグラフに対する以下の辺彩色定理を示した．

定理 2 (Vizing [7])**.** 無向グラフ G に対して，$\Delta(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$ が成り立つ．

ここで，$\mu(G)$ は G における多重辺の本数の最大値を表す．Gupta [3] は，定理 1 を辺被覆詰め込みを含む枠組みに拡張した．

定理 3 (Gupta [3])**.** $G = (V, E)$ を二部グラフ，k を正の整数とする．このとき，辺の色付け $\pi : E \to [k]$ であって，すべての $v \in V$ に対して $|\pi(\delta(v))| \geq \min\{\deg(v), k\}$ を満たすものが存在する．

ただし，$F \subseteq E$ に対して，$\pi(F) := \{\pi(e) \mid e \in F\}$ と定めている．Gupta [2] は，定理 2 も辺被覆詰め込みを含む枠組みに拡張し，証明なしで発表した．

定理 4 (Gupta [2])**.** $G = (V, E)$ を無向グラフ，k を正の整数とする．このとき，辺の色付け $\pi : E \to [k]$ であって，すべての $v \in V$ に対して以下を満たすものが存在する:

- $\deg(v) \leq k$ のとき，$|\pi(\delta(v))| \geq \min\{\deg(v), k - \mu(v)\}$ が成り立つ．
- $\deg(v) \geq k$ のとき，$|\pi(\delta(v))| \geq \min\{\deg(v) - \mu(v), k\}$ が成り立つ．

ここで，$\mu(v)$ は v に接続する多重辺の本数の最大値を表す．定理 4 の証明は Fournier [4] によって与えられた．Gupta [2] は，定理 2 の別の拡張として次の定理も与えた．

定理 5 (Gupta [2])**.** $G = (V, E)$ を無向グラフ，k を正の整数とする．$S := \{v \in V \mid \deg(v) + \mu(v) > k\}$ とおく．このとき，S が独立集合なら，辺の色付け $\pi : E \to [k]$ であって，すべての $v \in V$ に対して $|\pi(\delta(v))| \geq \min\{\deg(v), k\}$ を満たすものが存在する．

U を有限集合とする．$\mathcal{F} \subseteq 2^U$ が**交叉族**であるとは，$X \cap Y \neq \emptyset$ を満たすすべての $X, Y \in \mathcal{F}$ に対して，$X \cup Y, X \cap Y \in \mathcal{F}$ が成り立つことをいう．関数 $g : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ が**交叉優モジュラ**であるとは，$\mathcal{F}$ が交叉族であり，かつ $X \cap Y \neq \emptyset$ を満たすすべての $X, Y \in \mathcal{F}$ に対して，$g(X) + g(Y) \leq g(X \cup Y) + g(X \cap Y)$ が成り立つことをいう．Schrijver [6] は，交叉優モジュラ関数に関する以下の彩色定理を示した．

定理 6 (Schrijver [6]). U を有限集合，k を正の整数とする．$\mathcal{F} \subseteq 2^U$ を交叉族，$g : \mathcal{F} \to \mathbf{Z}$ を交叉優モジュラ関数とする．このとき，すべての $X \in \mathcal{F}$ に対して $\min\{|X|, k\} \geq g(X)$ が成り立つなら，色付け $\pi : U \to [k]$ であって，すべての $X \in \mathcal{F}$ に対して $|\pi(X)| \geq g(X)$ を満たすものが存在する．

さらに，Schrijver [6] は，定理 1 と定理 6 の共通の一般化である，優モジュラ彩色定理を示した．

定理 7 (Schrijver [6], **優モジュラ彩色定理**). U を有限集合，k を正の整数とする．$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq 2^U$ を交叉族，$g_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathbf{Z}$ と $g_2 : \mathcal{F}_2 \to \mathbf{Z}$ を交叉優モジュラ関数とする．このとき，すべての $i = 1, 2$ と $X \in \mathcal{F}_i$ に対して $\min\{|X|, k\} \geq g_i(X)$ が成り立つなら，色付け $\pi : U \to [k]$ であって，すべての $i = 1, 2$ と $X \in \mathcal{F}_i$ に対して $|\pi(X)| \geq g_i(X)$ を満たすものが存在する．

今まで述べた定理の関係を図に表すと以下のようになる．

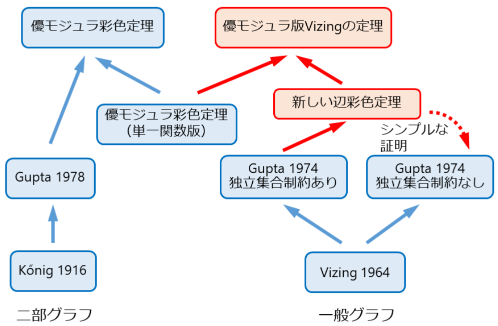

図 1. 定理の関係図．青枠が既存研究，赤枠が示した結果を表す．

3 主結果

本研究では，まず定理 5 の拡張である新しい辺彩色定理を示した．

定理 8. $G = (V, E)$ を無向グラフ，k を正の整数とする．$c : V \to \mathbf{Z}_+$ を，すべての $v \in V$ について $c(v) \leq \min\{\deg(v), k\}$ を満たす関数とする．$S := \{v \in V \mid c(v) + \mu(v) > k\}$ とする．このとき，S が独立集合なら，辺の色付け $\pi : E \to [k]$ であって，すべての $v \in V$ に対して $|\pi(\delta(v))| \geq c(v)$ を満たすものが存在する．

定理 8 は，Berge と Fournier [1] による定理 2 の証明を拡張することで示した．また，定理 8 を用いた，定理 4 のシンプルな別証明も得た．

さらに本研究では，定理 8 を優モジュラ関数の枠組みに拡張した．この結果を述べるために，いくつか用語を定義する．U を有限集合とする．$\mathcal{F} \subseteq 2^U$ が**三重交叉族**であるとは，$X_1 \cap X_2 \cap X_3 \neq \emptyset$ を満たす任意の相異なる $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{F}$ に対して，$X_i \cup X_j, X_i \cap X_j \in \mathcal{F}$ が，$(X_1, X_2), (X_2, X_3), (X_3, X_1)$ のうち少なくとも 2 ペア (X_i, X_j) について成り立つことをいう．関数 $g : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ が**三重交叉優モジュラ**であるとは，$\mathcal{F}$ が三重交叉族であり，かつ $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \neq \emptyset$ を満たす任意の相異なる $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{F}$ に対して，$X_i \cup X_j, X_i \cap X_j \in \mathcal{F}$ と $g(X_i) + g(X_j) \leq g(X_i \cup X_j) + g(X_i \cap X_j)$ が，$(X_1, X_2), (X_2, X_3), (X_3, X_1)$ のうち少なくとも 2 ペア (X_i, X_j) について成り立つことをいう．本研究では，定理 8 と定理 6 の共通の一般化として，次の定理を示した．

定理 9. U を有限集合，k を正の整数とする．$\mathcal{F} \subseteq 2^U$ を三重交叉族，$g : \mathcal{F} \to \mathbf{Z}$ を三重交叉優モジュラ関数とする．$\mathcal{L} := \{X \in \mathcal{F} \mid g(X) + D_{\mathcal{F}}(X) > k\}$ とする．このとき，$\mathcal{L}$ が g-層族であり，かつすべての $X \in \mathcal{F}$ に対して $\min\{|X|, k\} \geq g(X)$ が成り立つなら，色付け $\pi : U \to [k]$ であって，すべての $X \in \mathcal{F}$ に対して $|\pi(X)| \geq g(X)$ を満たすものが存在する．

ただし，各 $X \in \mathcal{F}$ に対して $D_{\mathcal{F}}(X) := \max\{|X \cap Y| \mid Y \in \mathcal{F},\ X \not\subseteq Y \not\subseteq X\}$ と定めている．また，g-層族は層族の条件を緩和したものである．定理 9 は，Berge と Fournier [1] による定理 2 の証明と，Schrijver [6] による定理 7 の証明を組み合わせることによって示した．

参考文献

[1] C. Berge and J. -C. Fournier. A short proof for a generalization of Vizing's theorem. *Journal of Graph Theory*, 15:333–336, 1991.

[2] R. P. Gupta. On decompositions of a multi-graph into spanning subgraphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 80:500–502, 1974.

[3] R. P. Gupta. An edge-coloration theorem for bipartite graphs with applications. *Discrete Mathematics*, 23:229–233, 1978.

[4] J. -C. Fournier. Méthode et théorème général de coloration des arêtes d'un graphe. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 56:437–453, 1977.

[5] D. Kőnig. Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére. *Mathematikai és Természettudományi Értesitő*, 34:104–119, 1916.

[6] A. Schrijver. Supermodular colourings. In L. Lovász and A. Recski, editors, *Matroid Theory*, pages 327–343, North-Holland, 1985.

[7] V. G. Vizing. The chromatic class of a multigraph. *Cybernetics*, 1:32–41, 1965.