

# 漸化式を用いた多面体上の格子点の数え上げ

数理情報学専攻 48206233 松下 祐樹

指導教員 平井広志 准教授

## 1 多面体上の格子点の数え上げ

ある多面体上の格子点の集合は、行列  $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ 、ベクトル  $b \in \mathbb{Z}^n$  を用いて、 $\{y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m | Ay = b\}$  と表される。この集合の要素数を計算することは整数計画問題の解の個数の数え上げに等しく、グラフの完全マッチングの数え上げなどを含む。例えば、 $A$  をグラフの接続行列、 $b$  を全成分 1 のベクトルとすると、 $|\{y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m | Ay = b\}|$  はグラフの完全マッチングの個数となるが、完全マッチングの数え上げは、二部グラフの場合でも、パーマネントの計算であり、 $P \neq NP$  の下で多項式時間で計算することはできない。

この問題は、素朴な動的計画法を用いて、時間計算量  $O(m(\|b\|_{\infty} + 1)^n)$ 、空間計算量  $O(\|b\|_{\infty} + 1)^n$  で計算できる。Barvinok[1] は  $m$  を固定したときの効率的なアルゴリズムを与えている。Lasserre-Zeron[2] は、 $A$  が非負のケースで、次のような母関数を用いる手法を考案した。

補題 1 ([2]). 非負行列  $A \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n \times m}$ 、整数ベクトル  $b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  に対し、 $f(b) = |\{y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m | Ay = b\}|$  と定める。 $\hat{z}(f) = \sum_{b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} f(b)x^b$  とすると、

$$\hat{z}(f) = \frac{1}{(1 - x^{A_1}) \dots (1 - x^{A_m})}$$

である。ただし、 $A_i$  は  $A$  の  $i$  列目の列ベクトルを表し、 $c \in \mathbb{Z}^n$  に対し、 $x^c = x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n}$  と表記する。

母関数による手法は、最新の研究 [3] でも用いられ、時間計算量  $O(\text{poly}(n, m, \|b\|_{\infty}))$  ( $\|b\|_{\infty} + 1)^n$ 、空間計算量  $O(\text{poly}(n, m, \|b\|_{\infty}))$  を達成している。

## 2 漸化式による手法

計算の困難な関数に対して、その関数の偏微分方程式系から、数値的に計算するホロノミック勾配法という手法がある [4]。具体的には、多変数関数  $f(x_1, \dots, x_n)$  に対して、次のようなことを考える。

定義 2 (Pfaffian 方程式系). 有理係数の多項式環  $R = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)[\partial_1, \dots, \partial_n]$  を定める。 $R$  の元で、 $f$  を解に持つ微分方程式全体の集合は、 $R$  の左イデアルであ

り、このイデアルを  $I$  とする。 $R/I$  が有理関数係数のベクトル空間をなす場合、基底  $s_1 = 1, \dots, s_m$  がとれて、基底性より、 $\partial_i s_j = \sum_{k=1}^m g_{ijk}(x) s_k$  が成立する。ここで  $g_{ijk}(x)$  は  $\mathbb{C}$  係数の  $n$  変数有理関数である。よって、各成分が  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  の行列  $Q_i$  を用いて、

$$\partial_i \begin{pmatrix} s_1 \circ f \\ \vdots \\ s_m \circ f \end{pmatrix} = Q_i \begin{pmatrix} s_1 \circ f \\ \vdots \\ s_m \circ f \end{pmatrix}$$

となる。この偏微分方程式系を Pfaffian 方程式系という。

これを用いて、数値的に  $f$  を計算できる。本研究では、この手法を離散的な場合に適用して漸化式を得る。 $\mathbb{Z}^n$  上の関数  $f$  に対し、差分作用素  $\Delta_i^+$  を  $\Delta_i^+ f(b) = f(b + e_i)$  と定める。ここで  $e_i$  は第  $i$  成分が 1 で他が 0 の整数ベクトルである。Pfaffian 方程式系は微分方程式系であるが、Zeilberger の方法 [5] で、差分方程式系を得ることができ、それが  $f$  を計算するための漸化式になる。以上をまとめたのが、次のアルゴリズムである [6]。

### 多面体上の格子点数え上げアルゴリズム

入力: 非負行列  $A \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n \times m}$ 、ベクトル  $b \in \mathbb{Z}^n$

出力:  $f(b) = |\{y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m | Ay = b\}|$

- ①  $\hat{z}(f)$  を解に持つ微分方程式を計算する
- ②  $f$  を解に持つ差分方程式を計算する。
- ③  $f$  に関する Pfaffian 方程式を計算する。
- ④ 必要な初期値を計算し、 $f$  の値を計算する。

上記のアルゴリズムにおいて、微分方程式や差分方程式の集合は、微分作用素や差分作用素の入った環のイデアルをなしており、グレブナー基底を用いて計算できる。この方法は、多面体上の格子点の数え上げに対して、新規的な手法であり、興味深いのが、計算過程でグレブナー基底を用いるために計算量解析が困難になる。また、負成分を含む行列への拡張や、実装が行われていないなどの様々な課題が残されている。

## 3 成果 1: $n = 1$ の計算量解析

本研究では、 $n = 1$  の場合に、グレブナー基底を用いない方法を考案することで、Hirai 19[6] の手法に上から

の計算量評価を与えることに成功した。なお、 $n = 1$  の場合に、 $A \in \mathbb{Z}^m, b \in \mathbb{Z}$  が与えられ、 $\{x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m | Ax = b\}$  を計算する問題は、ナップサックの制約に対応する。

補題 3.  $\hat{z}(f) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{(1-x^{A_i})}$  とする。ここで、 $g(x) = \prod_{i=1}^m (1-x^{A_i})$  とおくと、

$$\left( g(x) \frac{\partial}{\partial x} + g'(x) \right) \circ \hat{z}(f) = 0$$

が成立する。また、この微分方程式から、先行研究 [6] の方法で、差分方程式を計算すると、

$$\prod_{i=1}^m (1 - \Delta^{-A_i}) \circ f = 0$$

という差分方程式が得られる。

実は、この差分方程式は、包除原理を用いて、 $f$  を計算する場合の漸化式となる。 $\gcd(g(x), g'(x))$  で割ったあとの微分方程式から差分方程式を計算すると、より最大項の小さい漸化式が得られる。その漸化式を用いると、次の定理が得られる。

定理 4. 多項式  $h(x) = \gcd(g(x), g'(x))$ , 集合  $S = \{d \in \mathbb{N} | d \text{ を約数に持つ } a_i \text{ が存在する} \}$  とする。 $\frac{g(x)}{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{g'(x)}{h(x)}$  という微分方程式を用いて、漸化式を構成すると、その漸化式の次数は  $\sum_{d \in S} \phi(d)$  である。ただし、 $\phi$  はオイラートーシェント関数を表す。この漸化式をもとに、 $f(b)$  を計算した場合、時間計算量  $O((b+m) \sum_{d \in S} \phi(d))$ , 空間計算量  $O(\sum_{d \in S} \phi(d))$  を達成する。

先行研究 [6] ではグレブナー基底を用いるために、計算量解析が困難であったが、定理 1 の方法で導出した漸化式より、最大項の小さいものが得られることが示せるので、上からの計算量評価が可能となる。

#### 4 成果 2: 負成分を含む行列への対応

定義 5 (端点を有する多面体).  $\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m | Ax = 0\} = \{0\}$  なる多面体を端点を有する多面体と定める。

行列  $A$  が非負なら、多面体  $\{x \in \mathbb{R}^m | Ax = b\}$  は端点を有する多面体である。 $A$  に負の成分を含む場合でも、多面体が端点を有することもある。本研究では、行列  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  が  $\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m | Ax = 0\} = \{0\}$  を満たすときに非負に変換するアルゴリズムを考案した。アルゴリズムのアイデアは次のようなものである。

まず、 $\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m | Ax = 0\} = \{0\}$  となる場合に、 $\{Ax | x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m\}$  を図示すると図 1 のようになる。こ

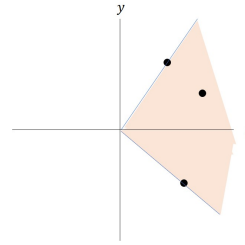


図 1.  $A$  の点が貼る錐

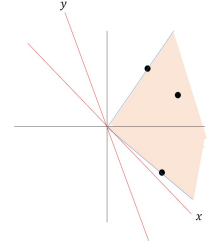


図 2. 錐と新しい座標

こで、図 2 のように、超平面を用いて新たな座標軸を定義してやると、各点を非負にできる。代数的には、可逆な行列  $B$  で、 $BA \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times m}$  となるような  $B$  をかけることに等しい。また、可逆な行列  $B$  に対し、 $Ax = b \Leftrightarrow BAx = Bb$  が成立するので、入力  $(A, b)$  に対し、このような  $B$  を構築して、 $(BA, Bb)$  に対して、アルゴリズムを適用することで、負成分を含む行列にアルゴリズムを拡張に成功した。

#### 5 成果 3: 特異点の発見

本研究では、先行研究 [6] の手法を実装することで、漸化式の遷移が上手く行かない点が発生することを発見した。これは、漸化式を導出する段階で、有理関数係数の環のグレブナー基底に関する演算を行うが、分母が 0 となるような点を代入してしまうと、計算が正しくならない。逆に、そのような点を経由しなければ正しく演算が行えることを示した。そして、係数付きの漸化式を構成することも提案している。

#### 参考文献

- [1] A.I.Barvinok, Polynomial time algorithm for counting integral points in polyhedra when the dimension is fixed. *Math. Oper. Res.*, Vol. 19(1994), 769–779.
- [2] J.B.Lasserre and E.S.Zeron, On counting integral points in a convex rational polytope. *Math. Oper. Res.*, Vol. 28(2003), 853–870.
- [3] H.Hirai, R.Oshiro and K.Tanaka, Counting integral points in polytopes via numerical analysis of contour integration. *Math. Oper. Res.*, Vol. 45(2020), 455–464.
- [4] H.Nakayama, K.Nishiyama, M.Noro, K.Ohara, T.Sei, N.Takayama and A.Takemura, Holonomic gradient descent and its application to Fisher-Bingham integral. *Adv. Appl. Math.*, Vol. 47(2011), 639–658.
- [5] D.Zeilberger, A holonomic systems approach to special functions identities. *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 32(1990), 321–368.
- [6] 平井広志 “漸化式に基づく多面体内の格子点の数え上げについて”, 応用数学会研究部会連合発表会, 筑波大学, つくば市 2019 年 3 月