修士論文 要旨

高速行列積による効率的セレクティングアルゴリズム

数理情報学専攻 48-206235　的矢 知樹
指導教員　鈴木 大慈 准教授

1　はじめに

セレクティングは, 順序付き有限集合に対して, 整数 i が入力されたときに i 番目の要素を出力する問題であり, ランキングは, 入力された集合の要素に対して何番目の要素か答える問題である. この2つの問題はサンプリングとデータ圧縮という非常に重要な問題と密接な関係がある.

サンプリングは与えられた離散分布に従ってインスタンスを生成する重要な問題である. もしもセレクティングが可能であれば, 一様分布を入力することで離散集合上の一様サンプリングが可能となる.

有限集合 S が与えられたとき, その要素を表現するためには少なくとも $\lceil \log |S| \rceil$ ビット必要である. ランキングとセレクティングを用いることで, 情報理論的下界を達成するサイズまで情報を圧縮することが可能となる.

本研究では効率的な多項式時間セレクティングアルゴリズムに焦点を当てる.

2　背景と既存研究

セレクティングは2つの問題を部分問題として含む. 要素の数え上げと1つの要素の出力である.

要素の数え上げは一般的には難しい問題である. セレクティングアルゴリズムに対する入力が正当か判定するためには, 集合の要素の個数を計算する必要であるため, 数え上げはセレクティングの実行に不可欠である. しかし, ほとんどの数え上げ問題は #P-困難であり, NP 困難より難しい計算量クラスに属する.

行列木定理により, グラフ上の全域木の個数はラプラシアン行列の行列式で計算することが可能である. この行列木定理を拡張することで, 行列式計算により多項式時間数え上げすることが可能な離散構造が数多く知られている [3].

条件を満たす要素を1つ出力する問題に対しては数多くの多項式時間アルゴリズムが開発されてきた. 中でも, 与えられたグラフ, 線形マトロイド交叉等に対して, 最大マッチング, 共通独立集合等 を出力する行列を用いた代数的アルゴリズムが近年研究されている [2].

多項式時間数え上げ可能離散構造として最も単純な例である全域木に対しては, 行列木定理による数え上げと同じ計算時間のセレクティングアルゴリズムが知られている [1].

本研究では, 行列式を用いて数え上げが可能であることが知られている離散構造に対するセレクティングアルゴリズム, 特に行列式計算と同じ計算時間のセレクティングアルゴリズムを提示する.

3　主結果

3.1　ナイーブサンプリング

Kulkarni は, 多項式時間数え上げが可能な離散集合に対して, その離散集合上の一様分布のサンプリングを多項式時間で行うことが出来るアルゴリズムを示した. 本研究では, 多項式時間数え上げが可能な離散集合に対する多項式時間セレクティングアルゴリズムの存在を示し, そのアルゴリズムに対応するランキングアルゴリズムの存在も示した.

3.2　タイトセレクティング

表 1. 行列式計算により多項式時間で数え上げ可能な離散構造の一覧. グラフに対しては頂点数を n, 行列に対しては, 行数を r, 列数を n とする.

離散構造	計算量	数え上げ	セレクティング サンプリング
全域木	$O(n^\omega)$	Kirchhoff	Colbourn, Myrvold, Neufeld
有向全域木	$O(n^\omega)$	Tutte	Colbourn, Myrvold, Neufeld
Pf. 完全 マッチング	$O(n^\omega)$	Kasteleyn	Mucha, Sankowski
Pf. Pair 共通基	$O(nr^{\omega-1})$	Webb	**This work**
Pf. Parity パリティ基	$O(nr^{\omega-1})$	Oki, Matoya	**This work**

行列式を用いた多項式時間数え上げアルゴリズムが知られている離散構造に対して, 行列式計算一回と同じ計算量でのセレクティングアルゴリズムを新たに提示した. マトロイド交叉, マトロイドパリティ問題の行列を用いた定式化に基づいた, 分割統治法による行列式計算と同じ計算量でマトロイド交叉, マトロイドパリティ問題を解く代数的アルゴリズムに基づいたものである. 表1に結果を纏めた.

3.3　重み付きセレクティング

表 2. 多項式時間で数え上げ可能な重み付き離散構造の一覧．グラフに対しては頂点数を n, 辺数を m, 行列に対しては, 行数を r, 列数を n とする．

離散構造	計算量	数え上げ	Selct Sample
最小全域木	$O(n^\omega)$	Broder, Mayr	**This**
最小有向全域木	$O(n^\omega)$	Hayashi, Iwata	**This**
Pf. 最小完全マッチング	$O(mn+n^2\log n+n^\omega)$	Matoya	**This**
Pf. pair 最小共通基	$O(nr^\omega+nr\log n)$	Oki, Matoya	**This**
Pf. parity 最小パリティ基	$O(n^3r)$	Oki, Matoya	**This** $O(n^{\omega+1}+n^3r)$

最小重み全域木, 最小有向全域木, パフィアングラフの最小完全マッチング, パフィアンペアの最小共通基, パフィアンパリティの最小パリティ基はそれぞれ多項式時間数え上げが知られている．これらの離散構造に対し, 多項式時間セレクティングアルゴリズムの存在を示し, 最小全域木と有向全域木に対しては行列式計算と同じ計算量で, 完全マッチングと最小共通基に対しては, それらのインスタンスを１つ求めるために必要な計算量と同じ計算量でのセレクティングアルゴリズムを提示した．表 2 は結果を纏めたものである．

これらのアルゴリズムは, それぞれの問題の双対問題の解を求め, 相補性条件を用いて最小重みインスタンスであることの同値条件を構成する手法である．

3.4　スパース性に基づいた高速化

表 3. (p,q)-分割的疎なパフィアンペア, パフィアンパリティの具体例と, そのセレクティング計算量．頂点数を n, 辺数を m とする．

離散構造	(p,q)-分割的疎	既存手法の計算量	提案手法の計算量
グラフの全域木	$(1,2)$	$O(n^\omega)$	$\boldsymbol{O(n^\omega)}$
有向グラフの有向全域木	$(1,2)$	$O(n^\omega)$	$\boldsymbol{O(n^\omega)}$
パフィアングラフの完全マッチング	$(1,2)$	$O(n^\omega)$	$\boldsymbol{O(n^\omega)}$
3-パフィアン 3-正則ハイパーグラフの全域ハイパー木	$(1,3)$	$O(mn^{\omega-1})$	$\boldsymbol{O(n^3)}$

全域木, 有向全域木はパフィアンペアとして捉えることが出来, マッチングはパフィアンペアとして捉えることが出来る．しかし, 一般のパフィアンペア, パフィアンパリティに対して構成されたアルゴリズムをそのまま適用すると計算量が悪化する．表現行列の疎性を定式化する (p,q)-分割的疎という枠組みを導入し, 表現行列が (p,q)-分割的疎である場合パフィアンペア, パフィアンパリティに対するアルゴリズムを提案し, 全域木, 有向全域木, マッチングをパフィアンペア, パフィアンパリティとみなして適用しても現在最速のアルゴリズムと同じ計算量となるアルゴリズムを提示した．

3.5　セパレータ定理による高速化

グラフのパフィアン向き付けは一般には存在しないが, 平面グラフやより一般的に $K_{3,3}$ をマイナーとして含まないグラフは, パフィアン向き付けが存在し, 多項式時間でパフィアン向き付けを求めることが出来る．グラフのセパレータ定理を用いて, グラフ H をマイナーとして含まないグラフに対して, 完全マッチングや最小重みマッチングのセレクティングアルゴリズムを高速化した．表 4 は結果をまとめたものである．

表 4. パフィアン向き付けされたグラフ上の完全マッチング, 最小完全マッチングのセレクティングアルゴリズム．グラフの頂点数を n, 辺数を m とする．

グラフ制約	重み	計算量	
–	重みなし	Mucha, Sankowski	$O(n^\omega)$
平面	重みなし	Mucha, Sankowski	$O(n^{\omega/2})$
H マイナーフリー	重みなし	This work (Folklore)	$O(n^{\omega/2})$
–	重み付き	**This work**	$O(mn+n^2\log n+n^\omega)$
H マイナーフリー	重み付き	**This work**	$O(n^{3/2}\log n)$

参考文献

[1] C. Colbourn, W. Myrvold, and E. Neufeld. Two algorithms for unranking arborescences. *Journal of Algorithms*, 20(2):268–281, 1996.

[2] N. J. A. Harvey. Algebraic algorithms for matching and matroid problems. *SIAM Journal on Computing*, 39(2):679–702, 2009.

[3] K. Matoya and T. Oki. Pfaffian pairs and parities: Counting on linear matroid intersection and parity problems. In *Proceedings of the 22nd Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization*, volume 12707 of *LNCS*, pages 223–237.