修士論文 要旨

安定ルームメイト問題とロバスト安定マッチング

数理情報学専攻 48206232　本間理恵
指導教員　平井広志 准教授

1　はじめに

安定結婚問題と安定ルームメイト問題は Gale と Shapley [2] によって 1962 年に提起されて以来，計算機科学，数学，経済学など様々な分野で研究されてきた（例えば [3]）．安定結婚問題とは，結婚相手を探す男女それぞれ n 人が，それぞれ異性に対して選好順序を持つとき，妥当な n 組の夫婦，すなわちマッチングを求める問題である．また，安定ルームメイト問題とは，2 人部屋に住むためのルームメイトを探している $2n$ 人が，それぞれ自分以外の $2n-1$ 人に対し選好順序を持つとき，妥当な n 組のルームメイトペア，すなわちマッチングを求める問題である．求めたい妥当なマッチングとして安定マッチングと呼ばれるものが提案されている [2]．

安定マッチングは一般に複数存在するため，その中からよりよいものを見つける研究が盛んであり，Mai と Vazirani [6] は安定結婚問題のよりよい安定マッチングの 1 つとしてロバスト安定マッチングを定義した．これは参加者の選好リストに変更が生じたあとでも依然として安定である確率が最大の安定マッチングを指す．彼らは安定結婚問題のロバスト安定マッチングが多項式時間で求まることを示した．

本研究では，ロバスト安定マッチングを安定ルームメイト問題に拡張し，以下を示した：

成果 1
ロバスト安定マッチングを求めるのは NP 困難．

成果 2
ロバスト安定マッチングを求める問題は多項式サイズの重み付き部分最大 2-SAT 問題へ帰着可能．

成果 3
完全ロバスト安定マッチングが存在するかを判定し，存在するならそのうちの 1 つを求めるのは多項式時間で可能．

ここで重み付き部分最大 2-SAT 問題とは，一部の節に重みが付与されている 2-CNF について，重みが与えられていない節をすべて充足する割り当てのうち，重みが付与されている節については，充足する節の重み和が最大となるものを求める問題をいう．また，完全ロバスト安定マッチングは，ロバスト安定マッチングの特殊ケースである．

2　安定マッチング集合

安定マッチングとは次のようなペアが存在しないマッチングである：マッチングに含まれないペアであって，2 人ともマッチングでのパートナーより互いのことを好む．安定マッチングは一般に指数個存在するため [4]，単純にすべての安定マッチングを求めてから，それらを比較してロバスト安定マッチングを求めるとすると指数時間かかってしまう．そこで，安定マッチング集合の構造とそのコンパクトな表現を利用することを考える．

定理 2.1 (Conway, [4])**.** 安定結婚問題の安定マッチング集合は分配束をなす．

定理 2.2 ([3, 1])**.** 安定ルームメイト問題の安定マッチング集合は，多項式サイズの 2-SAT 問題の解集合と 1 対 1 に対応する．

なお安定結婚問題では常に安定マッチングが存在するが，安定ルームメイト問題では存在しないインスタンスもある [2]．

3　安定結婚問題のロバスト安定マッチング

選好リストには確率 p_X で変更 X が生じるとする．変更が生じる前のインスタンスを A とし，A に変更 X が生じたインスタンスを A_X と書く．

定義 3.1 (（完全）ロバスト安定マッチング [6, 7])**.** A にとっての**ロバスト安定マッチング**とは，

$$\operatorname*{argmax}_{M:A\text{ にとって安定}} \Pr_X[M\text{ は }A_X\text{にとっても安定}]$$

をいう．特に $\Pr_X[M\text{ は }A_X\text{ にとっても安定 }] = 1$ を満たすとき**完全ロバスト安定マッチング**という．

[6] は選好リストに生じうる変更として 1 か所の前向きシフトで表される変更のみを考えている．前向きシフトとは y の選好リスト上の x が前にずれるような変更を指す．複数箇所の前向きシフトを組み合わせれば任意の変更を表現できるが，1 か所の前向きシフトで表される変更はそれに向けての第一歩といえる．

安定結婚問題のロバスト安定マッチングを求める問題は，最小カット問題に帰着できることから次の定理が成り立つ．最小カット問題への帰着には，安定マッチング集合の分配束構造を利用している．

定理 3.2 ([6])**.** 安定結婚問題のロバスト安定マッチングは多項式時間で求まる．

4 成果：安定ルームメイト問題のロバスト安定マッチング

本研究では，安定結婚問題でのみ考えられていたロバスト安定マッチングを安定ルームメイト問題に拡張した．ただし安定マッチングが存在するインスタンスのみを扱う．ロバスト安定マッチングは安定結婚問題の場合と全く同様に定め，また [6] と同様に 1 か所の前向きシフトで表される変更を考える．

安定ルームメイト問題に拡張する動機として，P2P 通信への応用が考えられる．P2P 通信でコンピュータ同士がファイルのやり取りを行う際，関連度が高い順で各コンピュータが選好順序を持つような安定ルームメイト問題を考えることができる [5]．コンピュータ上の情報は刻々と変化しているため，その選好順序も時間が経てば変化しうる．そこでよりよい安定マッチングとしてロバスト安定マッチングが考えられる．

成果 1 は，NP 困難である最小不満度安定マッチングを求める問題 [1] が，ロバスト安定マッチングを求める問題に帰着できることから示される．

成果 2 を示すには次の補題を使う．充足割り当て集合が安定ルームメイト問題の安定マッチング集合と 1 対 1 に対応する 2-CNF を f と書く．

補題 4.1. M は A にとっての安定マッチングとする．任意の変更 X に対し，次の 1. と 2. が同値となるような f の 2 つの変数 u_1^X, u_0^X が多項式時間で求まる：

1. M は A_X では不安定.
2. M に対応する f の解では，$u_1^X = 1$ かつ $u_0^X = 0$.

u_1^X, u_0^X は存在しないこともあるが，本要旨では簡単のためともに存在すると仮定する．この補題は，生じうる変更が 1 か所の前向きシフトで表される変更のみであることを利用して示される．

任意の変更 X について $(\neg u_1^X \vee u_0^X)$ を f に追加し，その重みを p_X として重み付き部分最大 2-SAT 問題を構成すると，解集合はロバスト安定マッチング集合と 1 対 1 に対応する．これは補題より「$f \wedge (\neg u_1^X \vee u_0^X) = 1 \iff \boldsymbol{u}$ は A にとって安定マッチングを表し，さらに $(u_1^X, u_0^X) \neq (1,0) \iff \boldsymbol{u}$ が表す A にとっての安定マッチングは A_X でも安定」であることからいえる．

1 か所の前向きシフトで表される変更は高々 $2n \times {}_{2n-1}C_2 = \mathrm{O}(n^3)$ 個であるため，f に追加する節は高々多項式個である．f が多項式サイズであることと合わせて，作成された問題は多項式サイズである．

成果 3 は，完全ロバスト安定マッチングを求める問題が多項式サイズの 2-SAT 問題と対応することから示される．**成果 2** で構成した重み付き部分最大 2-SAT 問題の重みを無視した 2-SAT 問題を考えればよい．

5 おわりに

本研究では，Mai と Vazirani が安定結婚問題に対して提案したロバスト安定マッチングを安定ルームメイト問題に拡張した．安定ルームメイト問題のロバスト安定マッチングに関する今後の課題として，次の 2 つが挙げられる：

- ロバスト安定マッチングの近似解を求めるアルゴリズムの開発，または近似困難性の証明.
- 安定マッチングが存在しないインスタンスに対してロバスト安定マッチングを拡張.

参考文献

[1] Tomás Feder. A new fixed point approach for stable networks and stable marriages. *Journal of Computer and System Sciences*, 45:233–284, 1992.

[2] David Gale and Lloyd S Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69:9–15, 1962.

[3] Dan Gusfield and Robert W Irving. *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. MIT press, Cambridge, MA, 1989.

[4] Donald E Knuth. *Mariages Stables*. Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1976.

[5] Dmitry Lebedev, Fabien Mathieu, Laurent Viennot, Anh-Tuan Gai, Julien Reynier, and Fabien De Montgolfier. On using matching theory to understand P2P network design. In *Proceedings of INOC 2007: International Network Optimization Conference*, pages 1–6, Spa, 2007.

[6] Tung Mai and Vijay V Vazirani. Finding stable matchings that are robust to errors in the input. In *Proceedings of ESA 2018: the 26th Annual European Symposium on Algorithms*, pages 60:1–60:11, Helsinki, 2018. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik.

[7] Tung Mai and Vijay V Vazirani. An efficient algorithm for fully robust stable matchings via join semi-sublattices. *arXiv preprint arXiv:1804.05537v4*, 2020.