修士論文 要旨

群作用を通じた符号グラフ準同型の解析

数理情報学専攻 48206228　長谷川雄祐

指導教員　谷川眞一 准教授

1　はじめに

グラフに対して値を返す関数をグラフパラメータという．その中でグラフ準同型関数と呼ばれるクラスは彩色多項式などの重要な例を含み，極値グラフ理論では特にグラフの列の極限を定式化するのに有用である．グラフ準同型関数はあるグラフへのグラフ準同型の個数として表される．ただし，グラフ準同型は次のように隣接関係を保つグラフ間の写像として定義される．

定義 1. G, H を無向グラフとする．$\varphi_V : V(G) \to V(H)$ と $\varphi_E : E(G) \to E(H)$ の組 $\varphi = (\varphi_V, \varphi_E)$ がグラフ準同型であるとは，任意の $e \in E(G)$ について，e の端点を u, v とすると $\varphi_E(e)$ の端点が $\varphi_V(u), \varphi_V(v)$ となるときをいう．

他方，符号グラフは正負の辺ラベルが付いたグラフをスイッチング同値という同値関係で割って得られ，社会ネットワークを中心に研究されている概念である．先行研究では符号グラフに対するグラフ準同型が定義され，その存在条件が興味の対象になっている．本研究ではさらに進んで符号グラフに対する符号グラフ準同型関数を定義し，通常のグラフ準同型関数の代表的特性である特徴付けと同型性判定が同様に成り立つことを示した．

2　符号付きグラフから符号グラフへ

符号付きグラフとはグラフ G と写像 $\sigma : E(G) \to \{+, -\}$ の組 $\widehat{G} = (G, \sigma)$ のことである．符号付きグラフの頂点に関するスイッチングと呼ばれる操作を考え，スイッチングで移り合うものを同一視した符号付きグラフ同値類が符号グラフである．

定義 2. 符号付きグラフ $\widehat{G} = (G, \sigma)$ の $u \in V(G)$ に関するスイッチングとは，u を端点とする辺のうち自己辺でないもの全ての符号を反転させた符号付きグラフを得ることである．有限回のスイッチングで移り合うという同値関係により符号付きグラフ全体を割って得られる同値類を符号グラフといい，$\widehat{G}$ とスイッチング同値な符号付きグラフを集めてできる符号グラフを $[\widehat{G}]$ と書く．

さらに，符号付きグラフと符号グラフの準同型は次のように定義される．

定義 3. $\widehat{G} = (G, \sigma), \widehat{H} = (H, \tau)$ を符号付きグラフとするとき，$\varphi_V : V(G) \to V(H)$ と $\varphi_E : E(G) \to E(H)$ の組 $\varphi = (\varphi_V, \varphi_E)$ が符号付きグラフ準同型であるとは，グラフ準同型でありかつ，符号を保つすなわち

$$\sigma = \tau \circ \varphi_E$$

であることをいう．また，$[\widehat{G}], [\widehat{H}]$ を符号グラフとするとき，$\varphi_V : V(G) \to V(H)$ と $\varphi_E : E(G) \to E(H)$ の組 $\varphi = (\varphi_V, \varphi_E)$ が符号グラフ準同型であるとは，代表元 $(G, \sigma) \in [\widehat{G}], (H, \tau) \in [\widehat{H}]$ が存在して (G, σ) から (H, τ) への符号付きグラフ準同型となることをいう．

このように定義した準同型の個数について関係式を示した．

定理 4. $[\widehat{G}], [\widehat{H}]$ を符号グラフとし，$(H, \tau) \in [\widehat{H}]$ であるとする．次が成り立つ．

$$\hom([\widehat{G}], [\widehat{H}]) = \sum_{(G,\sigma) \in [\widehat{G}]} \hom((G, \sigma), (H, \tau))$$

ただし，左辺は符号グラフ間の準同型の個数を表し，右辺の各項は符号付きグラフ間の準同型の個数を表す．

符号グラフは台グラフがもつ部分サイクルの符号により特徴付けられることが知られている [4]．したがって，辺の縮約などの局所的変形により大きく状況が変化するため扱いが難しい．これは，準同型関数の理論の拡張がすでに行われているハイパーグラフや重み付きグラフとは事情が異なる点である．

3　符号グラフと $\mathbb{Z}_2$-対称グラフ

グラフ S に $\mathbb{Z}_2$ が作用しており頂点集合への作用は自由であるとき，台グラフ S とその作用 ρ の組 (S, ρ) を $\mathbb{Z}_2$-対称グラフという．ただし，グラフに群が作用するとは頂点集合と辺集合それぞれへの作用が隣接関係と整合的であるときをいう．このとき，符号グラフと $\mathbb{Z}_2$-対称グラフは 1 対 1 に対応することが簡単な観察からわかる．さらに，$\mathbb{Z}_2$-対称グラフ間の準同型を台グラフ間のグラフ準同型であって作用と可換であるものとすることにより個数についての関係式を得た．

定理 5. 符号グラフ $[\widehat{G}], [\widehat{H}]$ に対応する $\mathbb{Z}_2$-対称グラフをそれぞれ $(S,\rho), (T,\lambda)$ とする．次が成り立つ．

$$2^{c(G)} \hom([\widehat{G}], [\widehat{H}]) = \hom((S,\rho), (T,\lambda))$$

ただし，$c(G)$ は連結成分の個数を表し，右辺は $\mathbb{Z}_2$-対称グラフ間の準同型の個数を表す．

この変換から，$\mathbb{Z}_2$-対称グラフにおいて定まる準同型関数の特徴付けと同型性判定を示せば符号グラフにも同様の結果が与えられることがわかる．

4　特徴付け及び同型性判定

通常のグラフ準同型関数と同様の特徴付けを得るためにはラベル付けの定式化が要請されるので，軌道グラフという概念を定義することで $\mathbb{Z}_2$ の対称性が加味されるように $\mathbb{Z}_2$-対称グラフのラベル付けと糊付け積を定式化した．

定義 6. $\mathbb{Z}_2$-対称グラフ (S,ρ) について，軌道グラフ $\mathrm{Orb}(S,\rho)$ とは $V(\mathrm{Orb}(S,\rho)) = V(S)$ であって同じ軌道に属する相異なる 2 頂点間を辺で結んだ単純グラフをいう．符号グラフ $[\widehat{G}]$ に対応する $\mathbb{Z}_2$-対称グラフが (S,ρ) であるとき，$[\widehat{G}]$ と準同型 $\alpha\colon K_2^k \to \mathrm{Orb}(S,\rho)$ の組を k-ラベル付き符号グラフという．ただし，K_2^k は k 個の K_2 の非交叉和である．そこから，2 つの k-ラベル付き符号グラフ $([\widehat{G}],\alpha), ([\widehat{H}],\beta)$ の糊付け積を次のように定める．すなわち，それぞれに対応する $\mathbb{Z}_2$-対称グラフの非交叉和をとり，各 $u \in K_2^k$ について $\alpha(u), \beta(u)$ を同一視して得られる k-ラベル付き符号グラフを糊付け積とする．また，これを $([\widehat{G}],\alpha) * ([\widehat{H}],\beta)$ と書く．

以上から，符号グラフ準同型関数の特徴付けが記述される．ただし，証明には Lovász[2] による圏論的拡張を用いた．

定理 7. 符号グラフパラメータ f が符号グラフ準同型である，すなわちある符号グラフ $[\widehat{H}]$ を用いて $f = f_{[\widehat{H}]}$ と表されるための必要十分条件は以下の (i) と (ii) が成立することである．

(i) f が乗法的である．すなわち，任意の符号グラフ $[\widehat{G_1}], [\widehat{G_2}]$ について

$$f([\widehat{G_1}] \sqcup [\widehat{G_2}]) = f([\widehat{G_1}]) f([\widehat{G_2}])$$

(ii) $g([\widehat{G}]) = 2^{c(G)} f([\widehat{G}])$ とおくと，任意の正整数 k に対して関係行列 $M(g,k)$ が正定値となる．ただし，$M(g,k)$ とは，各行各列を k-ラベル付き符号グラフにより添字づけし，列 $([\widehat{G}],\alpha)$ かつ行 $([\widehat{H}],\beta)$ である成分を $f(([\widehat{G}],\alpha) * ([\widehat{H}],\beta))$ とした無限次行列をいう．また，無限次行列が正定値であるとは任意の主小行列が正定値であることとする．

続いて，符号グラフ準同型の個数の一致から符号グラフの同型性判定が行えることを示した．この証明では，通常のグラフに対する証明をラベル付けの意味で解釈し直すことで，$\mathbb{Z}_2$-対称グラフに対するラベル付けの議論を適用した．具体的には，頂点集合の分割によるグラフの縮約を，辺のないラベル付きグラフとの糊付け積とみなした．

定理 8. $[\widehat{H_1}], [\widehat{H_2}]$ を符号グラフとする．$|V(G)| \leq \max\{|V(H_1)|, |V(H_2)|\}$ であるような任意の符号グラフ $[\widehat{G}]$ について

$$\hom([\widehat{G}], [\widehat{H_1}]) = \hom([\widehat{G}], [\widehat{H_2}])$$

となるならば，$[\widehat{H_1}] \cong [\widehat{H_2}]$.

5　まとめ

符号グラフ準同型関数の特徴付けと識別が通常のグラフと同様に成り立つことを示し，符号グラフにおける準同型関数の理論の基礎を整備した．符号グラフ準同型関数に望まれる他の性質も $\mathbb{Z}_2$-対称グラフのラベル付けの議論を適用できる可能性がある．また，ゲイングラフをはじめとして一般の群対称性をもつグラフへの拡張も考えられる．今後の課題として，符号グラフの列の極限を考えたときの収束先となる符号グラフォンを定式化することが挙げられる．

参考文献

[1] M. Freedman, L. Lovász, and A. Schrijver. Reflection positivity, rank connectivity, and homomorphism of graphs. *Journal of the American Mathematical Society*, 20(1):37–51, 2007.

[2] L. Lovász and A. Schrijver. Semidefinite functions on categories. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 16(2):R14, 2009.

[3] L. Lovász. *Large networks and graph limits*, Volume 60. American Mathematical Society, 2012.

[4] R. Naserasr, E. Sopena, and T. Zaslavsky. Homomorphisms of signed graphs: An update. *European Journal of Combinatorics*, 91:Article 103222, 2021.