

減衰度が指定された関数やその Fourier 変換の高精度な近似公式

数理情報学専攻 48206220 高倉 直哉

指導教員 田中 健一郎 准教授

1 はじめに

本論文は高精度な近似公式の中でも関数近似公式と Fourier 変換近似公式の 2 つの主題で展開する。

1.1 減衰度が指定された関数の近似公式

鵜島ら [7] は、一重指数関数的に減衰する解析関数の成す関数空間に対する関数近似公式を構成した。さらに、田中ら [5] はその公式の拡張版を扱っている。ここでは、その公式を鵜島型関数近似公式と呼ぶことにする。一方で、杉原 [2] は関数の減衰度が一般の場合にも適用できる関数近似公式を構成した。この関数近似公式を杉原型関数近似公式と呼ぶことにする。また両者は標本点を適切にとれば、杉原 [2] で求められた関数近似の誤差の下限を達成する。

一重指数関数的に減衰する関数の場合、鵜島型関数近似公式と杉原型関数近似公式を比較すると、前者の方が近似精度が良い場合があることが杉原ら [3] によって示された。このことから減衰度が一般の場合でも鵜島型の方が杉原型より高い近似精度を実現する可能性がある。

1.2 全周波数領域における Fourier 変換の近似公式

大浦 [1] は連続 Euler 変換を用いて Fourier 変換を近似する方法を構築した。この手法では一度の近似で、任意の有限区間を定めてそこでの近似精度を良くすることはできるが、全周波数領域を精度良く近似することはできない。

本論文の目的は、全周波数領域で高精度な近似公式を導くことである。それによって、全周波数領域で良い近似精度を保証する公式を構築でき、微分などの作用素をそのままその公式に作用させることができるため、微分方程式の解法に適用できる可能性がある。

そこで、高精度近似法である Sinc 法と連続 Euler 変換を用いた大浦の公式を組み合わせることを提案する。

2 関数近似公式

2.1 既存の関数近似公式

近似対象の関数 f の定義域を複素平面状の帯状領域

$$\mathcal{D}_d = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}\zeta| < d\} \quad (d > 0) \quad (1)$$

とし、重み関数 w と同様に減衰する関数の空間を、

$$H^\infty(\mathcal{D}_d, w) = \{f : \mathcal{D}_d \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は } \mathcal{D}_d \text{ で正則} \quad (2) \\ \text{かつ } \|f\| < \infty \text{ を満たす}\}$$

と定義する。ここで、 $\|f\| = \sup_{z \in \mathcal{D}_d} |f(z)/w(z)|$ である。また、 $T_d(x), B_{n,k}(x; a, \mathcal{D}_d)$ を

$$T_d(x) = \tanh\left(\frac{\pi}{4d}x\right), \quad (3)$$

$$B_{n,k}(x; a, \mathcal{D}_d) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} T_d(x - a_j) \quad (4)$$

と定義する。ここで、 $a = \{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ は相異なる n 個の標本点を表す。

一重指数減衰する関数 $(1 - \psi(z)^2)^{\mu/2}$, $\psi(x) = \tanh(x/2)$ と同様に減衰する関数 $f \in H^\infty(\mathcal{D}_d, (1 - \psi(z)^2)^{\mu/2})$, $0 < d < \pi$ に対し、 $\mu/2 < \nu < \mu/2 + 1$ を満たす実数 ν を用いて、次の鵜島型関数近似公式が提案された [5, 式 (3.2)].

$$f(x) \approx L_{\nu,n}[a; f](x) \quad (5) \\ := \sum_{k=1}^n f(a_k) \frac{2d}{\pi} \frac{B_{n,k}(x; a, \mathcal{D}_d)}{B_{n,k}(a_k; a, \mathcal{D}_d)} \\ \cdot \frac{(1 - \psi(x)^2)^\nu}{(1 - \psi(a_k)^2)^{\nu-1}} \frac{T_d(x - a_k)}{\psi(x) - \psi(a_k)}.$$

2.2 拡張された鵜島型関数近似公式

減衰度が一般の重み関数 w で表された場合に拡張した鵜島型関数近似公式を次のように定める。

$$\bar{L}_{\epsilon,n}[a; f](x) \quad (6) \\ = \sum_{k=1}^n f(a_k) \frac{B_{n,k}(x; a, \mathcal{D}_d)w(x)}{B_{n,k}(a_k; a, \mathcal{D}_d)w(a_k)} \frac{2d}{\pi} \\ \cdot \frac{(1 - \psi(x)^2)^\epsilon}{(1 - \psi(a_k)^2)^{\epsilon-1}} \frac{T_d(x - a_k)}{\psi(x) - \psi(a_k)}$$

ここで、 ϵ は $0 < \epsilon < 1$ を満たす任意の実数である。

この公式は $w(x) = (1 - \psi(z)^2)^{\mu/2}$, $\epsilon = \nu - \mu/2$ のとき (5) と一致する。この公式も関数近似の誤差の下限を達成することが示せる。また、数値実験によってこの提案公式と杉原型関数近似公式を比較した。標本点は田中と杉原 [6] の手法により求めたものを利用した。その結果、提案公式の精度の方が良くなる場合を確認した。

3 Fourier 変換近似公式

3.1 Sinc 法

指数減衰する $f \in H^\infty(\mathcal{D}_d, \exp(-A|z|))$ の Fourier 変換 $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx} dx$ の近似を考える。

そこで, $H^\infty(\mathcal{D}_d, \exp(-A|z|))$ に Fourier 変換を施した後の関数空間が $H^\infty(\mathcal{D}_A, \exp(-d|z|))$ であることを示した. この変換後の関数に Sinc 法を適用する.

Sinc 法とは, $\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & (t \neq 0) \\ 1 & (t = 0) \end{cases}$ で表される Sinc 関数を用いて,

$$\text{FT}[f](t) = F(t) \approx \sum_{k=-n}^n F(kh) \text{sinc}\left(\frac{t}{h} - k\right) \quad (7)$$

と近似する方法である. h は正の実数で刻み幅を表す.

特に, $H^\infty(\mathcal{D}_A, \exp(-d|z|))$ に Sinc 法を適用する場合, $h = \sqrt{\frac{\pi A}{dn}}$ と取ることによって, $\mathcal{O}(\sqrt{n} \exp(-\sqrt{\pi A d n}))$ の精度を実現することができる.

3.2 大浦公式

(7) では $F(kh)$ の値を知る必要があるため, 連続 Euler 変換 $w(x; p, q) = \frac{1}{2} \text{erfc}(x/p - q)$ を用いた大浦の公式で近似計算する. erfc は相補誤差関数である.

大浦公式は

$$F(t) \approx \tilde{F}_{N, h'}(t) = h' \sum_{k=-N-1}^N w(|kh'|; p, q) f(kh') e^{itkh'} \quad (8)$$

と書ける. ここで, h' は刻み幅を表している.

公式 (8) は $\omega_b/\omega_u \leq \min\{\alpha, 1/2\}$ を満たす ω_b, ω_u を予め定め, h', p, q を上手くとることで, $\omega_b < |t| < \omega_u$ を満たす $F(t)$ を $\mathcal{O}\left(C(N) \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi d \omega_b^2 N}{2(\omega_b + \omega_u)}}\right)\right)$ の精度で近似できる [4]. ここで α は f に依存する定数で, $C(N)$ は N に依存する定数である.

3.3 全周波数領域における Fourier 変換の近似公式

以上の背景を踏まえ, 以下の公式を提案した.

$$F(t) \approx \sum_{k=-n}^n \tilde{F}_{N, h'}(kh) S(k, h)(t) \quad (9)$$

近似誤差を小さくするために $\{kh\}_{k=1}^n$ を以下のように分割して, 各分割で $\{F(\pm kh)\}_{k=1}^n$ に大浦の公式を適用することを考えた.

$$\begin{aligned} \omega_{b1} &= h < 2h < \dots < r_1 h = \omega_{u1} & (10) \\ \leq \omega_{b2} &= (r_1 + 1)h < \dots < r_2 h = \omega_{u2} \leq \dots \\ \leq \omega_{bl} &= (r_{l-1} + 1)h < \dots < nh = \omega_{ul}. \end{aligned}$$

この分割に関して, できるだけ多くの分割を取る方がよいことを示した. そこで分割数が最大となる分割を用いて, 必要な標本点数 N が $N < 4\sqrt{\frac{dA}{\pi}} \cdot \frac{1+4a-a^2}{a(1+a)} n^{3/2} + o(n^{3/2})$ であることを示し, 提案公式全体が $\mathcal{O}(N \log N \exp(-BN^{1/3}))$ の精度を実現することを示した. 但し, B は f に依存する定数である.

また, いくつかの関数例の標本点数と近似誤差を数値実験によって求め, 理論値に整合することを確かめた.

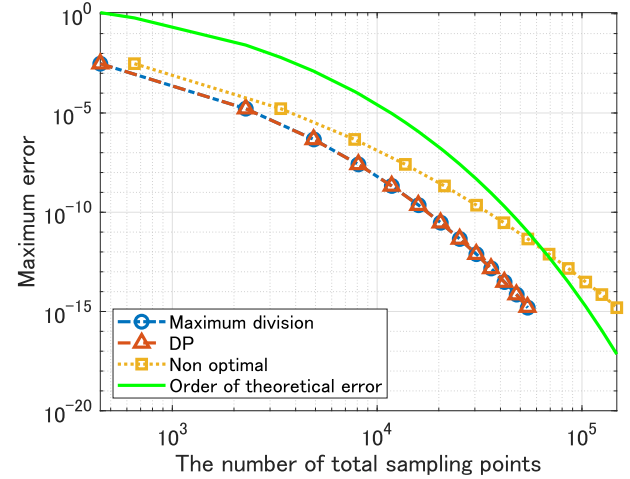


図 1. $f(x) = \text{sech}(\pi x)$, $F(t) = \text{sech}(t/2)$ に対する近似誤差

参考文献

- [1] Oura, T., A continuous Euler transformation and its application to Fourier transform of a slowly decaying function, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **130** (2001), 259–270.
- [2] Sugihara, M., Near optimality of the sinc approximation, *Mathematics of Computation*, **72** (2003), 767–786.
- [3] 杉田 幸亮, 杉原 正顕, 田中 健一郎, 岡山 友昭, eye-shaped 領域上の重み付きハーディ空間における 2 つの最適な関数近似公式の比較, 日本応用数学会 2016 年度年会, 科学技術計算と数値解析 (1)-2, 北九州国際会議場 (北九州市), 2016 年 9 月 12–14 日.
- [4] Tanaka, K., Error control of a numerical formula for the Fourier transform by Oura's continuous Euler transform and fractional FFT, *Journal of Computational and Applied mathematics*, **266** (2014), 73–86.
- [5] Tanaka, K., Okayama, T. and Sugihara, M., An optimal approximation formula for functions with singularities, *Journal of Approximation Theory*, **234** (2018), 82–107.
- [6] Tanaka, K. and Sugihara, M., Design of accurate formulas for approximating functions in weighted Hardy spaces by discrete energy minimization, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **39** (2019), 1957–1984.
- [7] 鶴島 崇, 田中 健一郎, 岡山 友昭, 杉原 正顕, Ganelius 標本点を用いた関数近似公式, 日本応用数学会論文誌, **27** (2017), 1–20.