

多体相互作用する大域結合位相振動子集団のダイナミクス

数理情報学専攻 48206236 丸井 優一郎

指導教員 郡 宏 教授

1 はじめに

複数の振動子が揃って動く現象を同期現象と呼び、自然科学から工学までさまざまな系で見られる普遍的な現象であることが知られている。この同期現象の研究において大きな役割を果たしたのが蔵本モデルである。蔵本モデルは結合位相振動子のモデルであり、位相がそれぞれの振動子の固有振動数と他の振動子との二体相互作用の両方に従って時間発展する。近年、この蔵本モデルを多体間の相互作用に拡張したモデルの研究が行われており、古典的な蔵本モデルとは異なるダイナミクスを示すことが明らかになっている [1, 2]。具体的には多重安定性や不連続な同期-非同期転移といった特徴があり、脳神経科学や情報科学といった応用につながりうるものが示唆されている。一方で、外的ノイズが加わったモデルに関する研究は少なく、応用の文脈からも重要度は高いと考えられる。そこで本研究では三体相互作用とノイズに駆動される位相振動子系のモデルを解析した。

2 三体相互作用のモデル

以下では固有振動数が均一な振動子集団を考える。振動子 m の位相 ($m = 1, \dots, N$) が従う発展方程式は

$$\dot{\theta}_m = \frac{K_3}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sin(\theta_j + \theta_k - 2\theta_m) + \xi_m(t) \quad (1)$$

で与えられる。ここで θ_m は振動子 m の位相、 K は結合強度を表し、固有振動数は 0 としている。またノイズ項 $\xi_m(t)$ は、 $\langle \xi_m(t) \xi_n(\tau) \rangle = 2D \delta_{mn} \delta(t - \tau)$ を満たすガウシアンノイズであるとする。ここで系の巨視的な状態を記述するオーダーパラメータを導入する。 l -オーダーパラメータ Z_l は、

$$Z_l = R_l \exp(i\Theta_l) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \exp(il\theta_m) \quad (2)$$

で定義される量である。ただし R_l は 0 以上 1 以下の値を取る実数であり、各 θ_m が一様分布に従う時には $N \rightarrow \infty$ の極限で 0 を、全ての振動子が同期して同じ位相を持つ時には 1 を取る。したがって R_l は系の同期度合いを測る量であると考えられる。また R_1 は一つの位相に対する同期の度合いを、 R_2 は π 離れた二

つの位相に対する同期の度合いを表している。たとえば全振動子の半分の位相が 0、残り半分の位相が π であれば、 $R_1 = 0$ だが $R_2 = 1$ となる。

オーダーパラメータ R_1, Θ_1 を用いると、式 (1) は

$$\dot{\theta}_m = K_3 R_1^2 \sin(2(\Theta_1 - \theta_m)) + \xi_m(t), \quad (3)$$

$$m = 1, \dots, N.$$

と書き直される。この式は個々の振動子が陽的に結合されているのではなく、平均場と結合していることを示す。

以下では $N \rightarrow \infty$ の極限を考える。振動子の位相の従う確率密度関数 $P(\theta, t)$ は、式 (3) に対応する以下の Fokker-Planck 方程式を満たす：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = K_3 R_1^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \sin(2(\theta - \Theta_1)) P \} + D \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \quad (4)$$

この Fokker-Planck 方程式の定常解は、

$$P_{st}(\theta) = c_1 \exp\left(\frac{K R_1^2 \cos(2(\theta - \Theta_1))}{2D}\right) \quad (5)$$

であり、任意の R_1 に対して $R_1 = 0$ となる。したがって、定常状態は非同期状態に限られる [3]。

しかし、初期条件を 2 クラスター状態にとると、特に K_3 が大きな領域では同期状態が非常に長い時間続くことが分かっている。この同期状態の寿命を見積もるために、モデルをポテンシャル $U(\theta; R_1)$ 中でノイズに駆動される粒子と見る：

$$U(\theta; R_1) = -\frac{1}{2} K_3 R_1^2 \cos(2(\Theta_1 - \theta)). \quad (6)$$

このポテンシャルは 2 つの極小点を持っている。振動子が 2 つの極小点に位置していると近似する。この近似はポテンシャルの壁が十分に高く、ノイズ強度が十分に小さい時に有効であると考えられる。この時 2 つの極小点間を振動子が移動するレートは Kramers の遷移率の考え方をを用いて計算でき、それによって R_1 の発展方程式を近似的に導出できる：

$$\dot{R}_1 = -\frac{4K_3 R_1^3}{\pi} \exp\left(-\frac{K_3 R_1^2}{D}\right). \quad (7)$$

同期状態の寿命 T を R_1 が初期値 R_0 から、閾値 R_{thre} 以下になるまでの時間と定義すると、式 (7) から

$$T = \int_{R_0}^{R_{\text{thre}}} \frac{\pi \exp\left(\frac{K_3 R_1^2}{D}\right)}{4K_3 R_1^3} dR_1 \quad (8)$$

と計算できる. 式 (8) によって見積もられる寿命と振動子のシミュレーションを計算した結果による寿命を, K_3 が大きな領域で比較したのが図 1 である. 結合強度 K_3 が大きい時には理論曲線が概ね結果をよく説明していると言える.

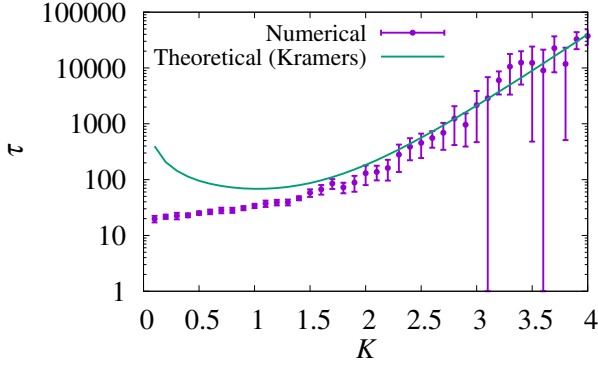


図 1. 同期状態の寿命の比較. 緑は式 (8) で見積もった時間を, 紫は式 (3) に従う $N = 10^3$ 振動子のシミュレーションによる時間を表す. シミュレーションは各結合強度に対して 10 回行っている. また, $R_0 = 0.6$, $R_{\text{thre}} = 0.1$, $D = 0.1$ としている.

3 二体・三体相互作用のモデル

次に, 二体相互作用と三体相互作用の両方があるモデルを考える:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_m = & \frac{K_2}{N} \sum_{l=1}^N \sin(\theta_l - \theta_m) \\ & + \frac{K_3}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sin(\theta_j + \theta_k - 2\theta_m) + \xi_m(t). \end{aligned} \quad (9)$$

記号は先ほどの三体相互作用のモデルと同じものを用いる. このモデルでも同様にオーダーパラメータを用いて式 (9) を書き換えた後, $N \rightarrow \infty$ の下で Fokker-Planck 方程式を書き下すことができる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial \theta} \{ K_2 R_1 \sin(\theta - \Theta_1) + K_3 R_1^2 \sin(2(\theta - \Theta_1)) \} P \\ & + D \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

定常解は,

$$P_{st}(\theta) = c_2 \exp \left(\frac{2K_2 \cos(\theta - \Theta_1) + K_3 \cos(2(\theta - \Theta_1))}{2D} \right) \quad (11)$$

となり, K_2, K_3 の組み合わせによっては $R_1 = 0$ 以外の定常解が存在する. また, 三体相互作用の場合と同様

に振動子がポテンシャルの 2 つの極小点に存在していると近似すれば R_1 の発展方程式が導出できる:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 = & -\frac{1}{\pi} \sqrt{(2K_3 R_1^2 + K_2 R_1) \left(-2K_3 R_1^2 + \frac{K_2^2}{2K_3} \right)} \\ & \cdot \exp \left(-\frac{1}{D} \left(K_3 R_1^2 + K_2 R_1 + \frac{K_2^2}{4K_3} \right) \right) (1 + R_1) \\ & + \frac{1}{\pi} \sqrt{(2K_3 R_1^2 - K_2 R_1) \left(-2K_3 R_1^2 + \frac{K_2^2}{2K_3} \right)} \\ & \cdot \exp \left(-\frac{1}{D} \left(K_3 R_1^2 - K_2 R_1 + \frac{K_2^2}{4K_3} \right) \right) (1 - R_1). \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) による R_1 の時間発展と振動子のシミュレーションによる R_1 の時間発展を, K_3 が比較的大きな場合に比較したのが以下の図 2 である. 両者の結果はほぼ一致している.

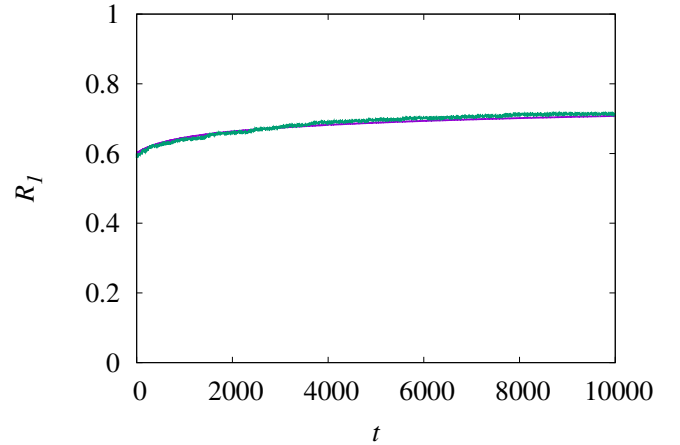


図 2. R_1 の時間発展の比較. 緑は式 (9) に従う $N = 10^3$ 個の振動子によるシミュレーションによる R_1 の時間発展を表し, 紫は式 (12) による R_1 の時間発展を表す. $K_2 = 0.6$, $K_3 = 3.0$, $D = 0.1$.

参考文献

- [1] Per Sebastian Skardal and Alex Arenas. Abrupt desynchronization and extensive multistability in globally coupled oscillator simplexes. *Phys. Rev. Lett.*, 122(24):248301, June 2019.
- [2] Can Xu, Xuebin Wang, and Per Sebastian Skardal. Bifurcation analysis and structural stability of simplicial oscillator populations. *Phys. Rev. Research*, 2(2):023281, June 2020.
- [3] Maxim Komarov and Arkady Pikovsky. Finite-size-induced transitions to synchrony in oscillator ensembles with nonlinear global coupling. *Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys.*, 92(2):020901, August 2015.