修士論文 要旨

離散微積分不等式の統一的解析に関する研究

数理情報学専攻 48196220　殿岡 達也

指導教員　松尾 宇泰 教授

1　序論

偏微分方程式論では，解の存在性，安定性の議論で様々な定理，例えば Sobolev の不等式 [1], Gagliardo–Nirenberg の不等式 [8] などが用られている [2]．一方偏微分方程式の中には，解を初等的に書くのが困難なものが多い．そのため差分法を用い，偏微分方程式を離散化することで数値計算スキームを構成し，数値的に解かれている．そしてその数値計算スキームにも同様に解の存在性，安定性の議論することは自然である [3]．そこで頻繁に問題になるのが，連続での定理の離散版が成立するかである．周期境界条件の離散 Sobolev の不等式 [6] や離散 Gagliardo–Nirenberg の不等式の特殊形 [7] は成立する．しかし，その証明は定理ごとに煩雑に行われ統一的ではなかった．そこで近年，離散版の定理を証明する際に連続の定理を経由することで証明する手法が考案された．１次元の周期境界条件においては区分線形に連続化し，連続の定理を用いて証明されている [5]．１次元では定理に含まれる微分は１階微分のみであることが多いため，この手法でも十分であった．しかし多次元においては高階微分が必要とされるため，直接多次元に適用することはできない．そこで周期境界条件においては，Guo et al. [4] が離散フーリエ変換を用いた連続化を用いた証明をした．しかしこの証明は周期境界条件に強く依存しており，他の境界条件に直接適用することができず，また定理の適用範囲も限られているといった問題点がある．本研究では境界条件に大きく依存せず多次元でも自然な統一的な証明方法を提案する．

2　記法

$u:[0,\ L_i]^n \to \mathbb{R}$ に対して L^p ノルム，L^∞ ノルム，$W^{k,\ p}$ ノルム を

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_0^{L_1} \cdots \int_0^{L_n} |u|^p dx_1 \dots dx_n\right)^{1/p},$$
$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{\boldsymbol{x}\in[0,\dots,L_i]^n} |u(x_1,\dots,x_n)|,$$
$$\|D^k u\|_{L^p} = \left(\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_n\\=k}} \|\partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n} u\|_{L^p}^p\right)^{1/p},$$
$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{i=0}^{k} \|D^i u\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$$

と定義する．周期境界条件を課した長さ N のベクトルの集合を，

$$\mathbb{S}_N = \left(\begin{array}{l} U = (\dots, U_0, \dots, U_{N-1}, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \\ \text{任意の } \mathrm{i} \in \mathbb{Z}, U_{N+i} = U_i \end{array} \right)$$

と定義する．区間の長さを L とすると，$\Delta x = L/N$ と定義する．これにより $U \in \mathbb{S}_N$ の離散ノルムを，

$$\delta_k^+ U_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x},$$
$$\|U\|_{L_{\mathrm{d}}^p} = \left(\Delta x \sum_{i=0}^{N-1} |U_i|^p\right)^{1/p},$$
$$\|U\|_{L_{\mathrm{d}}^\infty} = \max_{0\le i\le N-1} |U_i|,$$
$$\|U\|_{W_{\mathrm{d}}^{1,p}} = \left(\Delta x \sum_{i=0}^{N-1} \left(|U_i|^p + |\delta_k^+ U_i|^p\right)\right)^{1/p}$$

と定義する．これは L^p ノルム，L^∞ ノルムとソボレフノルムの離散版である．

3　既存研究

<u>**命題 3.1**</u> [5] $U \in \mathbb{S}_N$ に対し，$k = 0, 1, \dots, N-1$ において，$x \in [k\Delta x,\ (k+1)\Delta x]$ に対し，

$$\tilde{U}(x) = \frac{U_{k+1} - U_k}{\Delta x}(x - k\Delta x) + U_k$$

と区分線形化し，周期関数 $\tilde{U}$ を構成する．この周期関数 $\tilde{U}$ と U のノルムには，

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \|U\|_{L_{\mathrm{d}}^2} \le \left\|\tilde{U}\right\|_{L^2} \le \|U\|_{L_{\mathrm{d}}^2},$$
$$\|U\|_{L_{\mathrm{d}}^\infty} = \left\|\tilde{U}\right\|_{L^\infty}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \|U\|_{W_{\mathrm{d}}^{1,2}} \le \left\|\tilde{U}\right\|_{W^{1,2}} \le \|U\|_{W_{\mathrm{d}}^{1,2}}$$

という関係性が成立する．

以上の連続化を用いると，連続の定理を用いて，離散 Sobolev の不等式や離散 Gagliardo–Nirenberg の不等式の特殊形を証明することができる．

4　提案手法

本研究では境界条件に依存せず，高階微分に対応した連続化を提案する．

定理 4.1 $U=(U_0,U_1,\ldots,\ U_N)$ に対し連続化を行う．$k\in(0,1,\ldots,N-m)$, $x\in(k\Delta x,(k+1)\Delta x)$ に対し，連続関数 $\tilde{U}:[0,(N-m+1)\Delta x]\to\mathbb{R}$ の m 階微分 $\tilde{U}^{(m)}$ を,

$$\tilde{U}^{(m)}(x)=(\delta_k^+)^m U_k$$

のように，m 階差分により定義する．

$$\left\|(\delta_k^+)^l U\right\|_{L_{\mathrm{d}}^p}=\left(\Delta x\sum_{i=0}^{N-l}\left|(\delta_k^+)^l U_i\right|^p\right)^{1/p}$$

と定義すると，初期値を適切に定めながら $\tilde{U}^{(m)}$ を m 回積分することにより求めた $\tilde{U}$ には，任意の $l\in(0,\ldots,m)$, $0<p\le\infty$ において，l, p, m にのみ依存したある定数 $\alpha,\beta>0$ が存在し，

$$\alpha\left\|(\delta_k^+)^l U\right\|_{L_{\mathrm{d}}^p}\le\left\|\tilde{U}^{(l)}\right\|_{L^p}\le\beta\left\|(\delta_k^+)^l U\right\|_{L_{\mathrm{d}}^p}$$

が成立する．

定理 4.2 $\Delta x=L_x/N_x,\Delta y=L_y/N_y$ とおく．

$$U=\begin{pmatrix}U_{0,0}&U_{1,0}&\ldots&U_{N_x,0}\\U_{0,1}&U_{1,1}&\ldots&U_{N_x,1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\U_{0,N_y}&U_{1,N_y}&\ldots&U_{N_x,N_y}\end{pmatrix},$$

$$\delta_k^+U_{k,l}=\frac{U_{k+1,l}-U_{k,l}}{\Delta x},$$

$$\delta_l^+U_{k,l}=\frac{U_{k,l+1}-U_{k,l}}{\Delta y}$$

であるとすると，$(k,l)\in(0,1,\ldots,N_x-m)\times(0,1,\ldots,N_y-m)$, $(x,y)\in(k\Delta x,(k+1)\Delta x)\times(l\Delta y,(l+1)\Delta y)$ に対し，連続関数 $\tilde{U}:[0,(N_x-m+1)\Delta x]\times[0,(N_y-m+1)\Delta y]\to\mathbb{R}$ の m 階微分 $(\partial x)^m(\partial y)^m\tilde{U}$ を，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)^m\tilde{U}(x,y)=\left(\delta_k^+\delta_l^+\right)^m U_{k,l}$$

のように m 階差分を埋め込むことによりを定義する．このとき，初期値を適切に定めながら $\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)^m\tilde{U}$ を x, y 方向それぞれ m 回積分することにより $\tilde{U}$ を構成する．$\tilde{U}$ に対し，任意の $a,b\in(0,\ldots,m)$, $0<p\le\infty$ において，a, b, p, m にのみ依存したある定数 $\alpha,\beta>0$ が存在し，

$$\|(\delta_k^+)^a(\delta_l^+)^b U\|_{L_d^p}=\left(\Delta x\Delta y\sum_{i=0}^{N_x-a}\sum_{j=0}^{N_y-b}\left|(\delta_k^+)^a(\delta_l^+)^b U_{i,j}\right|^p\right)^{1/p}$$

とおくと，

$$\alpha\|(\delta_k^+)^a(\delta_l^+)^b U\|_{L_d^p}\le\left\|(\partial x)^a(\partial y)^b\tilde{U}\right\|_{L^p}$$

$$\left\|(\partial x)^a(\partial y)^b\tilde{U}\right\|_{L^p}\le\beta\|(\delta_k^+)^a(\delta_l^+)^b U\|_{L_d^p}$$

が成立する．

実用上は境界条件を考えることにより，離散 L^p ノルムに境界項を加えることが多い．一次元の周期境界条件に適用する．

定理 4.3 $U\in\mathbb{S}_N$, $0<m\ll N$ に対し，

$$U'=(U_0,U_1,\ldots,U_N,U_{N+1},\ldots,U_{N+m-1})$$

とおいて，この U' を用いて，本研究の手法により $\tilde{U}$ を構成する．任意の $l\in(0,\ldots,m)$, $0<p\le\infty$ において，l, p, m にのみ依存したある定数 $\alpha,\beta>0$ が存在し，

$$\left\|(\delta_k^+)^l U\right\|_{L_{\mathrm{d}}^p}=\left(\sum_{i=0}^{N-1}|(\delta_k^+)^l U_i|^p\right)^{1/p}$$

とおくと，

$$\alpha\left\|(\delta_k^+)^l U\right\|_{L_{\mathrm{d}}^p}\le\left\|\tilde{U}^{(l)}\right\|_{L^p}\le\beta\left\|(\delta_k^+)^l U\right\|_{L_{\mathrm{d}}^p}$$

が成立する．

提案手法を用いて初めて多次元の離散 Gagliardo–Nirenberg の不等式の一般系を証明した．

参考文献

[1] Robert A. Adams and John J.F. Fournier. *Sobolev spaces.* Elsevier, 2003.

[2] Charles M. Elliott and Zheng Songmu. On the Cahn-Hilliard equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 96(4):339–357, 1986.

[3] Daisuke Furihata and Takayasu Matsuo. *Discrete variational derivative method: a structure-preserving numerical method for partial differential equations.* Chapman and Hall/CRC, 2010.

[4] Jing Guo, Cheng Wang, Steven M. Wise, and Xingye Yue. An H^2 convergence of a second-order convex-splitting, finite difference scheme for the three-dimensional Cahn–Hilliard equation. *Communications in Mathematical Sciences*, 14(2):489–515, 2016.

[5] Nicholas J. Higham. *Accuracy and stability of numerical algorithms.* SIAM, 2002.

[6] Fritz John. *Lectures on advanced numerical analysis*, volume 153. Gordon and Breach New York, 1967.

[7] Takayasu Matsuo, Masaaki Sugihara, and Masatake Mori. A derivation of a finite difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation by the discrete variational method. *TRANSACTIONS-JAPAN SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS*, 8:405–426, 1998.

[8] Louis Nirenberg. On elliptic partial differential equations. In *Il principio di minimo e sue applicazioni alle equazioni funzionali*, pages 1–48. Springer, 2011.