

行列符号関数による可制御性グラミアン表現の 数値積分による計算

数理情報学専攻 48196223 中屋 貴博

指導教員 田中 健一郎 准教授

1 はじめに

制御理論において重要な概念の一つに可制御性という性質がある。これは対象とするシステムに適切な入力を加えることで、現在の状態から任意のその他の状態に移動させることができるという性質である。現実の問題ではシステムが暴走状態となった時システムに適切な入力を施すことで停止状態にできるということであり、安定制御のためには満たされてほしい性質の一つである。

可制御性グラミアンは与えられたシステムに対して以下の連続時間 Lyapunov 方程式

$$AX_c + X_c A^T = -BB^T \quad (1)$$

を解くことで得られる行列である。ここで、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ はシステムを決定づける行列であり、 A の全ての固有値の実部は負である。可制御性グラミアンはシステムが可制御かどうか、また、どのような状態へ制御しやすいのかという問題において重要な役割を果たす [2]。このような工学上の重要性から可制御性グラミアンの数値計算手法が数多く提案されてきた [1]。その手法の一つが、行列符号関数を利用したものである [3]。行列符号関数は符号関数

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{Re } z > 0 \\ -1 & \text{Re } z < 0 \end{cases}$$

を行列に拡張したものであり、(1) の形をした方程式を解くために導入された [5]。ここで、

$$\text{sign}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} -A & -BB^T \\ O & A^T \end{bmatrix}}_{:=T}\right) = \begin{bmatrix} I & -2X_c \\ O & -I \end{bmatrix} \quad (2)$$

という関係式が成り立つ。つまり、上のブロック行列 T の行列符号関数 $\text{sign}(T)$ を計算することでその部分行列から可制御性グラミアンが得られる。行列符号関数を解く手法としては Newton 法や Padé 近似を利用した手法等が挙げられる [3]。しかし、これらの手法は行列のサイズが高々数百程度のものを対象として提案されたものであり、大規模な行列に対しては計算時間の増大や精度の著しい悪化等の問題が生じ得る。

一方で $\text{sign}(T)$ は次のように表現できることが知られている：

$$\text{sign}(T) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty T(t^2 I + T^2)^{-1} dt. \quad (3)$$

(3) の被積分項が各 t に関して効率よく計算できれば、例えば二重指数関数型数値積分公式 (DE 公式) [6] のような数値積分公式で $\text{sign}(T)$ を効率良く計算できる。更に、数値積分公式において各 t での計算は独立であるため、大規模な行列に対して並列計算を行うことで行列のサイズが数十万程度のものに対しても可制御性グラミアンを高精度かつ高速に求められる可能性がある。

本研究は行列符号関数 $\text{sign}(T)$ を (3) に従って DE 公式で計算することで可制御性グラミアンを数値計算する手法を提案する。このように行列関数を DE 公式で求める手法は、 A^α や $\log(A)$ を計算する手法が研究されている [8, 7]。また、これらの研究では正定値対称な行列に対する誤差のオーダーについての理論評価が与えられている。本研究ではより一般的な条件の行列に対して提案手法が適用された場合の誤差の上界を導出し、いくつかの行列に対して数値実験を行いその性能を評価する。

2 可制御性グラミアンの数値計算

(3) を DE 公式で計算することを考える。DE 公式は端点に特異性のある解析関数の高精度な数値積分を行うために提案されたものであるが、このような半無限区間の積分に対しても有効であることが知られている [4]。[0, ∞) における積分を ($-\infty, \infty$) の区間の積分にするために関数

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{\pi}{2} \sinh x\right)$$

による二重指数関数型変換 $t = \psi(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} \text{sign}(T) &= \frac{2}{\pi} T \int_0^\infty (t^2 I + T^2)^{-1} dt \\ &= \frac{2}{\pi} T \int_{-\infty}^\infty \psi'(x) (\psi(x)^2 I + T^2)^{-1} dx \\ &\approx \frac{2h}{\pi} \underbrace{\sum_{k=-N}^N \psi'(kh) T (\psi(kh)^2 I + T^2)^{-1}}_{:=I_h^*} \quad (4) \end{aligned}$$

とすれば良い。

また、式 (2) からわかるように可制御性グラミアンの計算に必要なのは $\text{sign}(T)$ の右上部分行列である。よって、各 k において (4) の中を全て計算する必要はなく、まとめると

$$(\psi(kh)^2 I + A^2)X = B$$

という行列線形方程式を解くことに帰着される。

3 提案手法の誤差解析

提案手法を用いて $\text{sign}(T)$ を計算した際の誤差について考える。

DE 公式の離散化誤差に関しては帯状領域 $\mathcal{D}(d) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } z| < d\}$ 上で解析的な関数 $f(z)$ に対していくつかの条件の下で全体の誤差 E について

$$|E| \leq C' \exp(-CN/\log N)$$

となることが知られている。本研究では提案手法の全体誤差としてこれに類する以下の定理を導出した：

定理 3.1. 与えられたシステムに対してブロック行列 $T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ の行列符号関数 $\text{sign}(T)$ を数値積分公式 (4) で計算した時の誤差について以下の式が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \|I_h^* - \text{sign}(T)\|_F \\ & \leq \frac{n\sqrt{n}C\|T\|_F(C' + \|T^2\|_F)^{2n-1}}{\pi R^{4n}} \exp\left(-\frac{2\pi dN}{\log(8dN)}\right). \end{aligned}$$

ただし、 d や R は A の固有値分布から定まる定数である。

4 数値実験

本研究ではこれまでの内容を踏まえ、行列 A のサイズや固有値分布を変えて可制御性グラミアンを計算しその精度を検証した。本節ではその一部を紹介する。

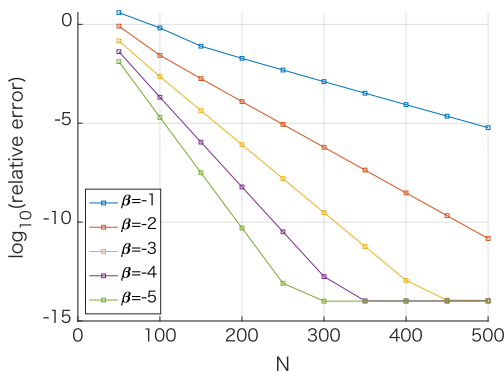


図 1. A の固有値分布に対する提案手法の精度の変化

図 1 は行列 A の固有値分布を変化させた場合の提案手法の精度の変化のグラフである。各凡例の β は A の全ての固有値の実部が β 未満であるということを示している。全ての場合において $N = (\text{サンプル点数})/2 - 1$ が多くなれば誤差が減少している。これは定理 3.1 の評価式の理論結果と一致していると言える。また、図 1 では β が変化すると同じ N に対して誤差が異なっているが、これは A の固有値分布が変化すると定理 3.1 の評価式の d, R が変化することから説明可能である。一方で固有値の実部が $(-1, 0)$ に存在するような特異行列に近い A では提案手法はうまく機能しなかった。

5 おわりに

本研究は可制御性グラミアンを行列符号関数を経由して DE 公式で計算する手法を提案し、その誤差の理論的上界を導出した。また、数値実験によって固有値分布がある条件を満たすような行列に対してうまく計算ができることを確認した。

今後の課題としては特異行列に近い行列にも適用できるように提案手法を改善すること、提案手法と並列計算を組み合わせた手法の考案が挙げられる。

参考文献

- [1] R. H. Bartels and G. W. Stewart. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [F4]. *Commun. ACM*, Vol. 15, No. 9, pp. 820–826, 1972.
- [2] Geir Dullerud and Fernando Paganini. *A Course in Robust Control Theory a convex approach*. Springer, 01 2000.
- [3] Nicholas J. Higham. *Functions of Matrices: Theory and Computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2008.
- [4] Masatake Mori. *The Double Exponential Formulas for Numerical Integration over the Half Infinite Interval*, pp. 367–379. Birkhäuser Basel, Basel, 1988.
- [5] J. D. Roberts. Linear model reduction and solution of the algebraic riccati equation by use of the sign function †. *International Journal of Control*, Vol. 32, No. 4, pp. 677–687, 1980.
- [6] Hidetosi Takahasi and Masatake Mori. Double exponential formulas for numerical integration. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Vol. 9, No. 3, pp. 721–741, 1974.
- [7] Fuminori Tatsuoka, Tomohiro Sogabe, Yuto Miyatake, and Shao-Liang Zhang. Algorithms for the computation of the matrix logarithm based on the double exponential formula. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 373, p. 112396, 2020. Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications.
- [8] 立岡文理, 曾我部知広, 宮武勇登, 張紹良. 二重指数関数型数値積分公式を用いた行列実数乗の計算. *日本応用数理学会論文誌*, Vol. 28, No. 3, pp. 142–161, 2018.