

## 統計的形狀解析におけるランドマークのベイズ推定

数理情報学専攻 48196215 小林 雅季

指導教員 清 智也 准教授

## 1 はじめに

統計的形狀解析において与えられた複数の形状についてそれらの形状の違いを定量的に評価することが重要である。形状を数学的に解析するためにランドマークと呼ばれる特徴的な代表点を抽出して表現することがある。しかし、ランドマークの数や位置を手動で設定しようとするると多くの手間や時間がかかり、人為的なミスが引き起こされる可能性があるため、ランドマークの個数や位置を自動的に決定するための研究が進められている。

本研究では、新たにクラスタリングを用いたランドマークの数と位置の推定法を提案し、従来手法 [4] に比べパラメータの変化に対し、推定結果が大きく変化しないことを実験結果と共に紹介する。

## 2 統計的形狀解析の基礎

## 2.1 SRVF

文献 [3] によると曲線  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  の SRVF  $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  は、

$$q(t) = \begin{cases} \dot{\beta}(t) / \sqrt{\|\dot{\beta}(t)\|} & \text{if } \dot{\beta}(t) \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義されており、これは  $L^2$  距離がパラメータ変換に対し不変、平行移動を除いて元々の曲線と 1 対 1 に対応するなど、解析をする上で都合の良い性質をもっている。

## 2.2 ランドマークとその復元

ランドマークの数を  $k$  とし、 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in [0, 1]^k$  をランドマークに対応するパラメータとする。また、 $\beta$  に対し、その復元は  $\theta$  を用いて決定されるランドマーク間を線分で結んだものと定められており、 $L(\theta)$  と表される。ランドマークの位置が適切かどうかは復元が元々の曲線とどれほど適合しているかで判断する。

Strait ら [4] は  $\beta, L(\theta)$  に対応する SRVF をそれぞれ  $q_\beta, q_L(\theta)$  とすると SRVF は

$$q_\beta | q_L(\theta), \theta \sim \mathcal{GP}(q_L(\theta), C)$$

とガウス過程に従うと仮定し、モデルを構成した。本研究でもこの仮定をもとにモデルを構成している。

## 3 ベイジアンモデルによるランドマークの推定

従来手法 [4] では、ランドマークの数と位置を推定するために尤度  $f(\beta|k, \theta)$ 、事前分布  $\pi(k, \theta)$  を設定し、

$$\pi(k, \theta | \beta) \propto f(\beta|k, \theta) \pi(k, \theta)$$

という関係から事後分布を計算し、RJCMC[1][2] によってサンプリングをする。

尤度は元々の曲線と復元の誤差に依存しているため、ランドマークの数が大きくなればなるほどその尤度は大きくなる。そのため、 $k$  の事前分布はポアソン分布として  $k$  が大きい値ではその確率質量がほとんど 0 になるようにして尤度関数にペナルティを科している。

ポアソン分布のパラメータ  $\lambda$  はこのペナルティの大きさを特徴づけるパラメータであり、 $\lambda$  の値によって推定されるランドマークの数は大きく異なる。

## 4 クラスタリングによるランドマークの推定

離散化された SRVF  $q^{(N)} = (x_1, \dots, x_N)$  に対し、次のモデルからデータ  $x_{1:N}$  が生成されていると考え、 $z_{1:N}$  を推定する。

For  $i = 1, \dots, N$  :

$$x_i \sim \mathcal{N}(\mu_{z_i}, \tau^{-1}I), \quad z_i = \sum_{j=1}^i \xi_j,$$

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_i \sim \text{Ber}(\lambda) \quad (i \geq 2)$$

For  $k = 1, \dots, K (= z_N)$  :

$$\mu_k \sim \mathcal{N}(\mu_0, (\rho_0 \tau)^{-1}I)$$

$$\tau \sim \text{Ga}(a_0, b_0), \quad \lambda \sim \text{Beta}(c_0, d_0)$$

このモデルから

$p(\xi_i = t | x_{1:N}, \xi_{1:N}^{\setminus i}, \mu_{1:K}, \tau, \lambda, \mu_0, \rho_0, a_0, b_0, c_0, d_0)$  などパラメータ  $\xi_{1:N}, \mu_{1:K}, \tau, \lambda$  の条件付き分布を計算することでギズスサンプリングによってサンプルを得る。

$\xi_{1:N}$  はパラメータ  $\lambda$  のベルヌーイ分布から生成され、 $\lambda$  はパラメータ  $c_0, d_0$  のベータ分布から生成されるので、 $c_0, d_0$  がクラス数  $K$  に影響を及ぼすと考えられる。

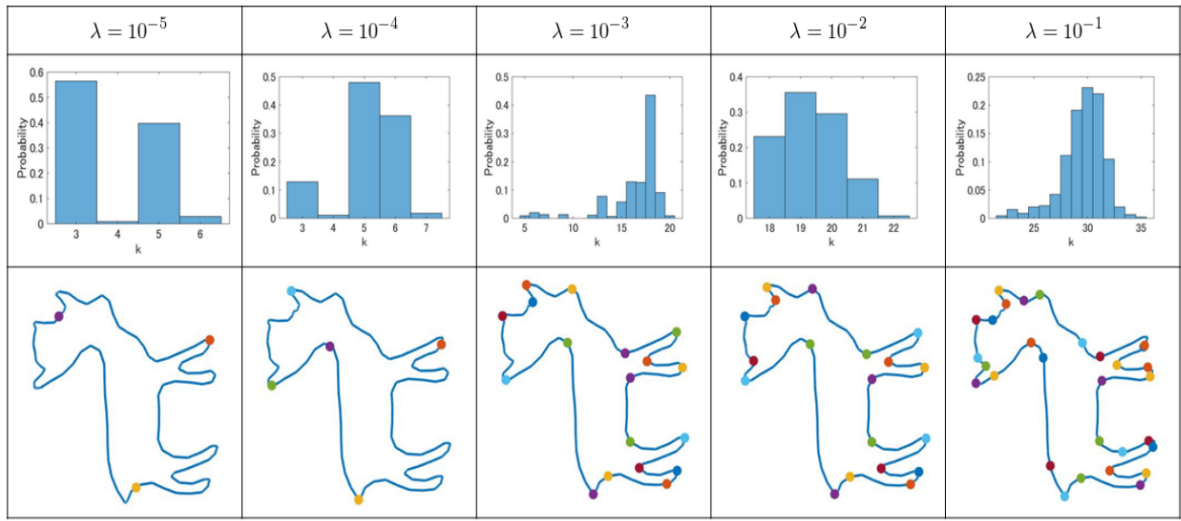


図 1. 従来手法によるランドマークの数と位置の推定

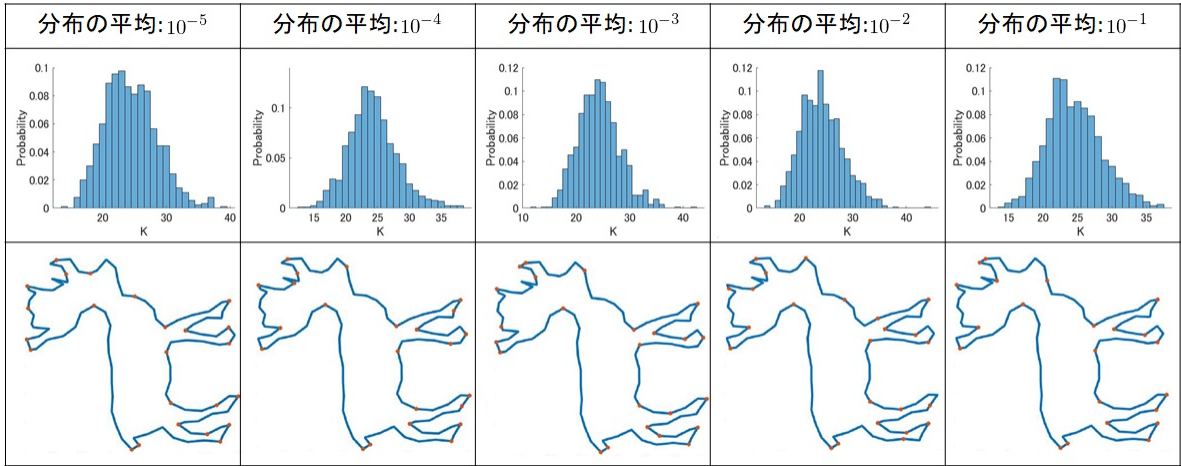


図 2. 提案手法によるランドマークの数と位置の推定

## 5 数値実験

100 個の点で離散化されたシカの輪郭に対し、従来手法と提案手法でランドマークの数に影響を及ぼすと考えられるパラメータ (既存手法では  $\lambda$ , 提案手法では  $c_0, d_0$ ) を変化させながらランドマークの数と位置の推定を行った結果を図 1,2 に示す。ただし、従来手法の RJMCMC と提案手法のギブスサンプリングはともに  $10^5$  の長さのマルコフ連鎖をサンプリングした後、最初の 10% を burn-in 期間として破棄し、残りを 100 個ごとに抽出することでサンプルを得ている。

図 1 ではポアソン分布のパラメータ  $\lambda$  の変化とともに推定されるランドマークの数も大きく変化している一方、図 2 ではベータ分布のパラメータ (平均) が変化しても推定されるランドマークの数に変化がおらず、ランドマークの設定の自動化という観点では、パラメータの選択を考慮する必要がない提案手法の方が優れていると考えられる。

## 参考文献

- [1] P. J. Green (1995), Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Computation and Bayesian Model Determination. *Biometrika*, vol. 82, issue 4, pp. 711-732.
- [2] S. Richardson and P. J. Green (1997), On Bayesian Analysis of Mixtures With an Unknown Number of Components. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, vol. 59, pp. 731-792.
- [3] A. Srivastava, E. Klassen, S. H. Joshi, and I. Jermyn (2011), Shape Analysis of Elastic Curves in Euclidean Spaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 33, issue 7, pp. 1415-1428.
- [4] J. Strait, O. Chkrebti and S. Kurtsek (2019), Automatic Detection and Uncertainty Quantification of Landmarks on Elastic Curves. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 114(527), pp. 1002-1017.