修士論文 要旨

有向グラフの連結度増大問題に対する効率的なアルゴリズム

数理情報学専攻 48-196227 **二川 央笙**
指導教員 **岩田 覚 教授**

1 概要

連結度増大問題は, 与えられたグラフに対し, できるだけ少ない本数の辺を追加することで, 要請される連結性を満たすようにする問題の総称である. 本研究で取り扱う問題は次の問題である.

頂点連結度増大問題 (連結度 $1 \to 2$)

入力 強連結な有向グラフ $G = (V, E)$.
出力 $G \cup F$ を **2-頂点連結**にする最小の辺集合 F.

上記の問題に対し, Frank, Jordán [FJ95b] は多項式時間解法を与えている. 論文中に計算量は明記されていないが, 解析により $O(n^2 m)$ で動作することを本研究で示した. さらに, 本研究は同問題に対して, より高速に動作する $O(n^3)$ アルゴリズムを提案するものである.

2 連結性

上記問題の目標である k-頂点連結性を以下に定める.

有向グラフ $G = (V, E)$ が**強連結**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の頂点間にパスが存在.
有向グラフ $G = (V, E)$ が **k-頂点連結**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $k-1$ 個以下の頂点を取り除いても強連結.

対象とする問題の目標 (2-頂点連結) は, 1 頂点の除去により頂点の分断が起こらないよう補強することである.

3 関連研究

有向グラフの頂点連結度増大問題に関する研究を表 1 に示す. 同様の問題として, 辺連結度増大問題が存在する. これには Frank [F92] を始めとして高速なアルゴリズムが多く知られる. 本研究は Frank, Jordán [FJ95b] によるアルゴリズムを改善するものである.

表 1 有向グラフの頂点連結度増大問題の既存研究

	連結度制約	計算量
Frank, Jordán [FJ95a]	任意	(楕円体法)
Frank, Jordán [FJ95b]	$1 \to 2$	$O(n^2 m)$
Frank, Jordán [FJ99]	$k \to k+1$	$O(n^6)$ (fixed k)
Végh, Benczúr [VB08]	任意	$O(n^7)$

4 Frank–Jordán のアルゴリズム

以下, $G = (V, E)$ は強連結な有向グラフとする. 次の in-tight/out-tight という概念が重要である.

空でない集合 $X \subsetneq V$ が **in-tight** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\exists v \in V$ に対し, $V \setminus (X \cup \{v\})$ から X へ辺がない.
空でない集合 $X \subsetneq V$ が **out-tight** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\exists v \in V$ に対し, X から $V \setminus (X \cup \{v\})$ へ辺がない.

これらをまとめて tight な集合と呼ぶ. グラフが 2-頂点連結であることと, tight な集合を持たないことが同値である. そこで, 2-頂点連結性を達成するには, 全ての tight な集合に対する「**補強**」が必要である.

Frank–Jordán のアルゴリズムは, 辺の追加により次々と「**欠乏度**」 $d(G)$ を減少させる工程からなる. この $d(G)$ を以下のように定める.

$$\begin{aligned} d(G) &:= \max\{d_{\text{in}}(G), d_{\text{out}}(G)\}, \\ d_{\text{in}}(G) &:= \text{互いに素な in-tight 集合の最大数}, \\ d_{\text{out}}(G) &:= \text{互いに素な out-tight 集合の最大数}. \end{aligned}$$

以下, G に対する追加辺の最適本数を $\gamma(G)$ とする. 必ず, 最適本数 $\gamma(G)$ は $d(G)$ 以上になる. さらに, Frank, Jordán [FJ95b] によれば, 欠乏度 $d(G)$ が 3 以上であれば, $\gamma(G) = d(G)$ が成立し, 同条件下にて $d(G)$ を減少させる追加辺が必ず存在することが保証される.

従って, 次のような手順を構成できる. 欠乏度を減少させる辺を見つけるのに計算量 $O(nm)$ を要し, 全体では時間計算量は $O(n^2 m)$ となる. 詳細は割愛する.

アルゴリズム (Frank, Jordán [FJ95b])

入力 強連結な有向グラフ G.
出力 グラフ G を 2-頂点連結にする追加辺集合 F.

1. $d(G) \leq 2$ のときは, 場合分けにより対処する.
2. $d(G) \geq 4$ である限り, 次を続ける.
   - $d(G)$ を減少させる辺 e を探し, G に追加.
3. 最終的に $d(G) = 3$ となり, 3 本の辺を適切に追加すれば, 2-頂点連結化が可能である.
   以上の工程で追加した辺の集合を出力する.

5 疎な部分グラフの探索

次の問題は **NP** 困難であることが知られるが, Georgiadis, Italiano, Laura, Parotsidis [GILP18] により, 効率的な近似アルゴリズムが考案されている.

最小 2-頂点連結部分グラフ問題

入力 2-頂点連結な有向グラフ $G = (V, E)$.

出力 G の部分グラフ $G' = (V, E')$ で, 2-頂点連結性を保存する**辺数最小**のもの.

手法の詳細は割愛するが, その和集合が 2-頂点連結となるような, 6 本の有向全域木を線形時間で構築する方法が提案されている. すなわち, 次が成立する.

定理 1. 有向グラフ G が 2-頂点連結のとき, 2-頂点連結な部分グラフ $G' = (V, E')$ であって, $|E'| \le 6n$ を満たすものが存在し, これを $O(m)$ で発見できる.

6 提案アルゴリズム

本研究における主要な補題は, 以下の二つである.

補題 2. 強連結グラフ $G = (V, E)$ に, 頂点 z を付加し, さらに, z の入次数と出次数が $d(G)$ (≥ 2) を超えないよう z と V との間に適切に辺を張ることで, 2-頂点連結グラフ $G^\circ = (V \cup z, E')$ を構成できる.

補題 3. グラフ $G^\circ = (V \cup z, E)$ が 2-頂点連結で, z の入次数と出次数が l 以下とする. このとき z を取り除いたグラフ $G := G^\circ \setminus z$ に対して, $d(G) \le l$ が成立する.

以上から, 次に示す提案アルゴリズムが構成される.

提案アルゴリズム

入力 強連結な有向グラフ G.

出力 グラフ G を 2-頂点連結にする追加辺集合 F.

1. $d(G) \le 2$ なら, Frank–Jordán の解法を利用.
2. $d(G) \ge 3$ なら, 適切に頂点 z と辺を追加して, 2-頂点連結なグラフ G° を得る.
3. G° の疎な部分グラフを探索し, H° を得る.
4. H° から頂点 z を除き, H を得る.
5. H に Frank–Jordán の解法を適用し, その出力 F をそのまま出力とする.

提案アルゴリズムが正しく動作し, アルゴリズム全体が時間計算量 $O(n^3)$ で動作することを以下に示す.

命題 4. 提案アルゴリズムで求められる辺集合 F は, $G \cup F$ を 2-頂点連結にするものの中で辺数最小である.

証明. まず $d(G) \le 2$ なら Frank–Jordán の正当性より明らかなので, $d(G) \ge 3$ とする. まず, 構成法から H は G の部分グラフである. Frank–Jordán の解法の正当性から, $H \cup F$ は 2-頂点連結なので, それを包含する $G \cup F$ も 2-頂点連結である. ここで $l := \gamma(G) = d(G)$ と定める. 構成法から H° は 2-頂点連結で, かつ z の入次数/出次数は l 以下だから, $\gamma(H) = d(H) \le l$ が成立. すると Frank–Jordán の解法が最適解を出力することから, $|F| \le l$ である. □

命題 5. 提案アルゴリズムは計算量 $O(n^3)$ で動作する.

証明. 詳細は省略するが, $d(G) \le 2$ の場合の手続きや, G° の構成は $O(nm)$ で完了する. 疎な部分グラフの探索は $O(m)$ で動作し, H の辺数 m' を $m' = O(n)$ まで削減できる. Frank–Jordán の解法は $O(n^2 m)$ であるから, これの H への適用は, 計算量 $O(n^2 m') = O(n^3)$ で完了する. 従って, 全体は $O(n^3)$ で動作する. □

7 結論

頂点連結度増大問題 (連結度 $1 \to 2$) に対し, Frank–Jordán による $O(n^2 m)$ の解法を改善する, 計算量 $O(n^3)$ の解法を提案した. 最小部分グラフ問題の近似アルゴリズムを利用し, グラフの辺数を削減する前処理を行う手法が, 本研究の主要な改善点である.

参考文献

[ET76] K. P. Eswaran and R. E. Tarjan, "Augmentation problems," *SIAM J. Discrete Math.*, **5**(4), 653–665, 1976.

[F92] A. Frank, "Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements," *SIAM J. Discrete Math.*, Vol. **5**(1), 25–53, 1992.

[FJ95a] A. Frank and T. Jordán, "Minimal edge-coverings of pairs of sets," *J. Comb. Theory*, Ser. B, **65**, 73–110, 1995.

[FJ95b] A. Frank and T. Jordán, "How to make a strongly connected digraph two-connected," In *Proc. IPCO*, May 29–31, 1995, Copenhagen.

[FJ99] A. Frank and T. Jordán, "Directed vertex-connectivity augmentation," *Math. Program.*, **84**(3), 537–553, 1999.

[GILP18] L. Georgiadis, G. F. Italiano, L. Laura, and N. Parotsidis, "2-vertex connectivity in directed graphs," *Inform. Comput.*, **261**(2), 248–264, 2018.

[VB08] L. A. Végh and A. A. Benczúr, "Primal-dual approach for directed vertex connectivity augmentation and generalizations," *ACM Trans. Algorithms*, **4**(2), 20:1–20:21, 2008.