

一様価格オークションの拡張とその効率指標の評価

数理情報学専攻 48196202 阿曾田 良介

指導教員 平井 広志 准教授

1 はじめに

オークションとは資産を分配するメカニズムであり、オークション理論は社会への多大な経済的効果をもたらす研究である。本研究では参加者が予算を持つ予算制約下のオークション理論を考える。近年盛んである広告オークションなどが予算制約下でのオークションであり、重要な設定である。

2 既存研究

予算制約下ではオークションメカニズムの分配効率を評価する際に、伝統的な効率指標である Social Welfare (社会効用) では上手く評価できないことが知られている。そこで1つの指針として、メカニズムの分配効率の最大化を目指す代わりにパレート最適性といった分配結果に対する性質を満たすメカニズムの研究も行われている [1, 3, 4]。この方向の研究では、パレート最適性を満たすオークションメカニズムをより現実にもった設定である参加者への分配量にポリマトロイド制約を課した設定への拡張などがなされている [3, 5]。別の方向として、Dobzinski and Paes Leme [2] によって Liquid Welfare (リキッド効用) という効率指標が考案された。これにより、Liquid Welfare を用いて既存のオークションメカニズムの効率評価やより効率のよいオークションメカニズムの考案が行われている [2, 6, 7]。

3 オークションの設定

本研究では、一様価格オークションを拡張したメカニズムを提案し、Liquid Welfare を用いて提案メカニズムを評価する。まず始めに本研究で考えるオークションの設定について説明する。

3.1 設定

n 人の参加者に m 個の同一の品物を分配するメカニズム M を考える。参加者 i はそれぞれが品物1つあたりに対して真の評価額 $v_i^* \in \mathbb{R}_+$ と予算 $B_i^* \in \mathbb{R}_+$ を持っている。参加者 i は品物への評価額 v_i を申告する。ここで、参加者は偽の評価額 ($v_i \neq v_i^*$) を申告することができる。また、参加者の予算 B_i^* については公開された情報として真の予算は知ることができるとする。メカニズム M は参加者から申告された評価額 $v \in \mathbb{R}_+^n$ と公開情報の予

算 $B^* \in \mathbb{R}_+^n$ をもとに、参加者への品物の割り当て $x \in \mathbb{R}_+^n$ と支払い額 $\pi \in \mathbb{R}_+^n$ を決めるものである。

3.2 参加者の効用

参加者の効用とは、オークションに参加することによって参加者が得られる利益を意味する。参加者 i の真の評価額を v_i^* とする。本研究では、オークション参加者 i の効用 u_i を以下のように定義する。

定義 1 (効用).

$$u_i := x_i v_i^* - \pi_i \quad (1)$$

これは、割り当てられた量の品物に対して参加者自身が評価している価格から支払額を引いたものである。

4 オークションメカニズムの性質

4.1 誘因両立性

誘因両立性とは、参加者は正直な申告をするときに自身の効用を最大化するという性質である。

4.2 個人合理性

個人合理性とは、参加者は真の評価額 v_i^* に基づく、ある評価額 v_i を申告することで効用を非負とすることができるという性質である。

補題 1 (Myerson [8]). メカニズム M が誘因両立性と個人合理性を満たすことは、以下の 1, 2 を満たすことと同値である。

1. $x_i(v_i, v_{-i})$ が v_i に対して単調非減少である。
2. $\pi_i(v_i, v_{-i}) = v_i x_i(v_i, v_{-i}) - \int_0^{v_i} x_i(u, v_{-i}) du$

ただし、メカニズム M において (v_i, v_{-i}) を申告したときの参加者 i の分配量を $x_i(v_i, v_{-i})$ と表すとする。

5 効率指標

定義 2 (Liquid Welfare [2]). メカニズム M の結果 (x, π) に対して、Liquid Welfare $W(x)$ は以下のように定義される。

$$W(x) := \sum_i \min(x_i v_i, B_i) \quad (2)$$

6 本研究で提案するメカニズム

以上の背景を踏まえ、本研究では一様価格オークションを以下の設定へ拡張した。

6.1 設定

n 人の参加者に 1 個の分割可能の同一の品物を分配するメカニズム M を考える. 参加者から v が申告され, 公開情報として B が得られる. (v, B) を用いてメカニズム M によって (x, π) を決定する. また参加者への分配量に,

$$\forall i, x_i \leq l \quad (3)$$

という制約が課されている. ただし, l は $0 < l \leq 1$ である実数.

6.2 メカニズム

Algorithm 1 提案メカニズム

Input: (v, B) ($v_1 \geq \dots \geq v_n$)

Output: (x, π)

$p \in \mathbb{R}_+$ に対して, $v_i > p$ を満たす最大の i を k とする

$f(p) = \sum_{i=1}^k \min(\frac{B_i}{p}, l)$ とする

p を 0 から上昇させていき, 初めて $f(p) \leq 1$ となったときの p, k を p^*, k^* とする

if $f(p) = 1$ **then**

Case1

$x_i = \min(\frac{B_i}{p^*}, l)$ ($1 \leq i \leq k^*$)

$x_i = 0$ ($i \geq k^* + 1$)

else

Case2

$v_i = p^*$ を満たす i の個数を s^* とする

$x_i = \min(\frac{B_i}{p^*}, l)$ ($1 \leq i \leq k^*$)

$x_i = \frac{\min(\frac{B_i}{p^*}, l)}{\sum_{j=k^*+1}^{k^*+s^*} \min(\frac{B_j}{p^*}, l)} (1 - \sum_{j=1}^{k^*} x_j)$ ($k^* + 1 \leq i \leq k^* + s^*$)

$x_i = 0$ ($i \geq k^* + s^* + 1$)

end if

π に関しては, Myerson [8] の補題に基づき定めるとする.

6.3 メカニズムの性質

ここでは, 提案メカニズムの性質について紹介する.

定理 2. 提案メカニズムは誘因両立性と個人合理性を満たす

証明の方針としては, Myerson の補題から $x_i(v_i, v_{-i})$ が v_i に対して単調非減少であることを示した.

6.4 メカニズムの効率評価

ここでは, 提案メカニズムの効率について紹介する.

6.4.1 Liquid Welfare の上界

$$W_l^* = \max_{x \in X} W(x) \quad (4)$$

ただし, $X = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_i x_i \leq 1 \mid x_i \leq l\}$ である.

定理 3. 提案メカニズムの Liquid Welfare $W(x)$ に関して, $W(x) \geq \frac{1}{2} W_l^*$ である.

証明の方針としては, W_l^* と $W(x)$ を計算し, 展開することで差となっている項を評価することで示した.

7 今後の展望

本研究では, 一様価格オークションを $\forall i, x_i \leq l$ という簡易な制約へと拡張したが, 最終的にはパレート最適性を満たすオークションメカニズムの研究で行われたように, ポリマトロイド制約へと拡張したい. ポリマトロイド制約下という複雑な制約下では, 一様価格オークションの拡張自体に工夫が必要であり, また Liquid Welfare の評価も難しいという問題があり今後の課題である.

参考文献

- [1] Lawrence M. Ausubel. An efficient ascending-bid auction for multiple objects. *American Economic Review*, 94:1452–1475, 2004.
- [2] Shahar Dobzinski and Renato Paes Leme. Efficiency guarantees in auctions with budgets. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 392–404. Springer, 2014.
- [3] Gagan Goel, Vahab Mirrokni, and Renato Paes Leme. Polyhedral clinching auctions and the adwords polytope. *Journal of the ACM*, 62:18, 2015.
- [4] Gagan Goel, Vahab Mirrokni, and Renato Paes Leme. Pareto efficient auctions with interest rates. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, volume 33, pages 1989–1995, 2019.
- [5] Hiroshi Hirai and Ryosuke Sato. Polyhedral clinching auctions for two-sided markets. *Mathematics of Operations Research*, to appear.
- [6] Pinyan Lu and Tao Xiao. Improved efficiency guarantees in auctions with budgets. In *Proceedings of the Sixteenth ACM Conference on Economics and Computation*, pages 397–413, 2015.
- [7] Pinyan Lu and Tao Xiao. Liquid welfare maximization in auctions with multiple items. In *International Symposium on Algorithmic Game Theory*, pages 41–52. Springer, 2017.
- [8] Roger B. Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6:58–73, 1981.