# Empirical Likelihood Incorporating the Existence Probability (存在確率を考慮した経験尤度)

数理情報学専攻 48186214　坂東 拓馬
指導教員　清 智也 准教授

## 1　はじめに

経験尤度はノンパラメトリックな統計的推論手法であり，分布を仮定せずに信頼領域を構成できるだけでなく，尤度に基づくパラメトリックな推論手法と類似した多くの良い特徴を持つ．しかしながら，小標本または多次元の設定においてその信頼領域の精度は悪い傾向にある．本論文では，経験尤度の推定精度を落とす要因の一つを従来の経験尤度に組み込むことで，信頼領域の精度を向上させる方法を提案する．

## 2　経験尤度とその問題

独立で同一の分布から $X_1, ..., X_n \in \mathbb{R}^d$ が観測され，興味のあるパラメータをその平均 $\mu_0$ とする．$\mu$ に関する対数経験尤度比関数 $\ell(\mu)$ は $X_1, ..., X_n$ から計算可能であり，適当な閾値 $\gamma$ を用いて信頼領域 $\{\mu \mid \ell(\mu) \le \gamma\}$ を構成することができる．この閾値を選択する代表的な手法として，Chi-squared calibration と Bootstrap calibration がある．[3], [4] によると，緩やかな仮定の下，真のパラメータ $\mu_0$ と $X_i$ の分散共分散行列のランク $q > 0$ に対して

$$\ell(\mu_0) \rightsquigarrow \chi^2_{(q)} \quad \text{as } n \to \infty$$

が成立する．この結果から，多くの状況でカイ二乗分布のパーセンタイルが閾値 $\gamma$ として用いられる．これを Chi-squared calibration と呼ぶ．また，[2] によって提案された Bootstrap を用いて経験尤度比関数をリサンプリングし，そのパーセンタイルを閾値として信頼領域を構成する方法を Bootstrap calibration と呼ぶ．[5] で広く取り上げられているように，経験尤度の信頼領域には多くの優れた特徴がある．しかしながら，小標本または多次元の設定においてこの信頼領域の精度が悪くなる傾向にあり，対数経験尤度比関数の存在確率（Existence probability）

$$P(\ell(\mu_0) < \infty)$$

が常に 1 より小さいことが部分的な要因となっている．[1], [3] の結果から，緩やかな条件のもとで

$$P(\ell(\mu_0) \le \gamma) = P(\ell(\mu_0) < \infty) P(\chi^2_{(q)} \le \gamma) + O(n^{-1})$$

が成立し，これは Chi-squared calibration で構成した信頼領域の被覆確率が有意水準で定めたレベルより下回る傾向にあることを示唆している．反して，Bootstrap calibration で構成した信頼領域の被覆確率は，多次元の設定において有意水準で定めたレベルより上回る傾向にある．サンプルサイズ $n$ が十分大きれば $P(\ell(\mu_0) < \infty) \simeq 1$ となり，存在確率が推論に及ぼす影響は無視できるが，そうでない場合にはこれを考慮する必要がある．

## 3　提案手法

存在確率の情報を従来の経験尤度に組み込むための二つの手法，Quasi-Bootstrap calibration と Modifying chi-squared calibration を紹介する．まず，これらの礎を築く Quasi-Bootstrap の説明を行う．Quasi-Bootstrap は存在確率を上手く推定できるように調整された Bootstrap である．観測された $X_1, ..., X_n \in \mathbb{R}^d$ に対し，その標本平均を $\bar{X}_n$，標本分散共分散行列を $\hat{V}_n$，経験分布関数を $\mathbb{F}_n$ とおく．また，$\varepsilon = d/n$, $G = N(\bar{X}_n, \hat{V}_n)$ に対して Quasi-Bootstrap 分布 $T_n$ を

$$T_n = (1 - \varepsilon)\mathbb{F}_n + \varepsilon G$$

と定義する．経験分布の代わりに $T_n$ を用いた Bootstrap のことを Quasi-Bootstrap と呼ぶ．以下では，この $X_1, ..., X_n$ と $T_n$ を用いた閾値選択手法のプロセスを説明する．

### 3.1　Quasi-Bootstrap Calibration

Quasi-Bootstrap calibration の手順は以下の通りである：

1. $X_1^*, ..., X_n^* \sim T_n$ をサンプリングする．
2. $X_1^*, ..., X_n^*$ の $\bar{X}_n$ に関する対数経験尤度比関数を計算する．
3. 十分大きな $B$ に対して 1, 2 を $B$ 回繰り返し，複製した対数経験尤度比関数を昇順に並べたものを

$\ell^{*(1)}(\bar{X}_n), ..., \ell^{*(B)}(\bar{X}_n)$ とおく．

4. 有意水準 $\alpha$ に対し，

$$\hat{\gamma}_{\text{QB}} = \ell^{*(\lceil(1-\alpha)B\rceil)}(\bar{X}_n)$$

を閾値とする．

### 3.2 Modifying Chi-Squared Calibration

$X_i$ の分散共分散行列のランクを $q > 0$, カイ二乗分布の $1-\alpha$ パーセンタイルを $\chi^{2,1-\alpha}_{(q)}$ とおく．Modifying chi-squared calibration の手順は以下の通りである：

1. $c = 0$ とおく．
2. $X^*_1, ..., X^*_n \sim T_n$ をサンプリングする．
3. $\bar{X}_n$ が $X^*_1, ..., X^*_n$ の成す凸包の内点となっていれば $c$ に 1 を足す．
4. 十分大きな $B$ に対して 2, 3 を $B$ 回繰り返す．
5. $\hat{p} = c/B$ とし，有意水準 $\alpha$ に対して

$$\hat{\gamma}_{\text{MC}} = \chi^{2,(1-\alpha)/\hat{p}}_{(q)}$$

を閾値とする．

### 3.3 漸近的性質

Quasi-Bootstrap calibration と Modifying chi-squared calibration について，以下が成立する．

**定理 3.1.** 先の $X_1, ..., X_n$, $T_n$ に対して

$$\sup_\gamma |P(\ell^*(\bar{X}_n) \leq \gamma \mid T_n) \to P(\ell(\mu_0) \leq \gamma)| \xrightarrow{P} 0$$

が成立する．

**定理 3.2.** $\limsup_{\|t\|\to\infty} |E[\mathrm{e}^{it^\top X_i}]| < 1$ を仮定する．このとき，適当な定数 $a$ に対して

$$P\left(\ell(\mu_0)(1 - a/n) \leq \hat{\gamma}_{\text{MC}}\right) = 1 - \alpha + O(n^{-2})$$

がいえる．

## 4 数値実験

表 1 では各閾値選択手法によって構成した信頼領域の被覆確率を比較している．Bart-EL は Bartlett 補正 [1] した経験尤度，MC-EL は modifying chi-squared calibration, B-EL は Bootstrap calibration, QB-EL は Quasi-Bootstrap calibration を指す．ほとんどのケースで QB-EL に軍配が上がっており，MC-EL は Bart-EL を優越しているのが見て取れる．いずれにせよ，本論文の提案手法が既存手法を改善する結果となった．

表 1. $\chi^2_{(1)}$ の平均に関する信頼領域の被覆確率 $P(\ell(\mu_0) \leq \gamma)$ ; $n$ はサンプルサイズ, $d$ は次元, level は有意水準で定めたレベルを指す．

| $n$ | $d$ | level | Bart-EL | MC-EL | B-EL | QB-EL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 0.90 | 0.876 | **0.888** | 0.861 | **0.859** |
| | | 0.95 | 0.908 | **0.923** | 0.901 | **0.903** |
| | | 0.99 | 0.935 | **0.951** | 0.956 | **0.959** |
| 20 | 5 | 0.90 | 0.850 | **0.871** | 0.933 | **0.877** |
| | | 0.95 | 0.870 | **0.925** | 0.943 | **0.935** |
| | | 0.99 | 0.894 | **0.943** | 0.943 | **0.943** |
| 30 | 7 | 0.90 | 0.872 | **0.880** | 0.938 | **0.878** |
| | | 0.95 | 0.905 | **0.916** | 0.980 | **0.936** |
| | | 0.99 | 0.934 | **0.982** | 0.984 | **0.984** |
| 50 | 10 | 0.90 | 0.902 | **0.902** | 0.927 | **0.887** |
| | | 0.95 | 0.940 | **0.941** | 0.974 | **0.948** |
| | | 0.99 | 0.974 | **0.976** | 0.998 | **0.991** |
| | 15 | 0.90 | 0.877 | **0.885** | 0.972 | **0.871** |
| | | 0.95 | 0.902 | **0.915** | 0.973 | **0.931** |
| | | 0.99 | 0.926 | **0.973** | 0.973 | **0.973** |

## 5 結論

経験尤度 Existence probability によって信頼領域の被覆精度があまりよくないケースがある．従来の閾値選択手法に Existence probability の情報を組み込むことで，被覆精度の改善が見られた．

## 参考文献


[1] DiCiccio, T., Hall, P. and Romano, J. (1988). Bartlett adjustment for empirical likelihood. Technical Report 298, Dept. Statistics, Stanford Univ., Stanford, CA.
[2] Efron, B. (1979). Bootstrap Methods: Another Look at the Jacknife. *Ann. Statist.* **7** 1–26.
[3] Owen, A. B. (1988). Empirical Likelihood ratio confidence intervals for a single functional. *Biometrika* **75** 237–249.
[4] Owen, A. B. (1990). Empirical Likelihood ratio confidence regions. *Ann. Statist.* **18** 90–120.
[5] Owen, A. B. (2001). *Empirical Likelihood.* Chapman and Hall/CRC, London, 2001.
[6] Tsao, M. and Wu, F. (2013). Empirical likelihood on the full parameter space. *Ann. Statist.* **41** 2176–2196.