

## Hawkes 過程における CVaR の効率的な計算手法の研究

数理情報学専攻 48186208 空 広行

指導教員 田中 健一郎 准教授

## 1 はじめに

連鎖倒産や地震、病気感染などの連鎖現象は、イベントが連鎖的に多数発生することによる大被害が予想される。そのリスクを定量化するような指標があれば、金融機関のリスク管理などに用いることができ、実務上有益である。そこで、連鎖現象の数理モデルである Hawkes 過程を利用して、連鎖現象のリスク指標として CVaR(Conditional Value at Risk)を計算した。

まず Hawkes 過程を説明する。Hawkes 過程を特徴付けるパラメータである強度 $\lambda(t)$ は、計数過程 $N_t = \sum_{i \geq 1} 1_{\{t_i \leq t\}}$ に対して、

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[N_{t+\Delta t} - N_t | \mathcal{F}_t]}{\Delta t} \quad (1)$$

で定義され、本研究ではこの強度 $\lambda(t)$ が

$$\lambda(t) = c + e^{-\kappa t}(\lambda_0 - c) + \sum_{i: t_i < t} \delta e^{-\kappa(t-t_i)} \quad (2)$$

の時に Hawkes 過程という。c は強度の回帰水準、 $\delta$  はイベント発生時のインパクト、 $\kappa$  は減衰スピードを表す。

次に CVaR を説明する。リスク指標として知られる VaR(Value at Risk)は、損失である確率変数 $N$ に対し確率 $\alpha$ を定めて、

$$\text{VaR}_\alpha(N) = \inf\{x | P(N \leq x) \geq \alpha\} \quad (3)$$

と表される。日本語では「予想最大損失額」と訳される。(3)式を利用して CVaR は(4)式で表される。CVaR は、VaR とは異なり、テールリスクを分析できる指標である。

$$\text{CVaR}_\alpha(N) = E[N | N \geq \text{VaR}_\alpha(N)] \quad (4)$$

## 2 既存研究

Hawkes 過程の CVaR を計算する先行研究は著者の知る限り、見つかってはいない。しかし、先行研究の容易な応用で計算可能であるため、その手法を既存手法と呼ぶことにする。

強度パラメータ  $(c, \lambda_0, \delta, \kappa)$  が既知の Hawkes 過程に対し、時間 $T$ を定めてサンプルパスを生成する乱数シミュレーションのことを Thinning 法という[7]。Thinning 法により、1つのサンプルパスに対しイベントが何回発生したかを観測できる。よって、多数のサンプルパスを

発生させれば、イベントの発生回数の分布を作成し、(4)式を計算することで CVaR が求まる。

既存手法の欠点は、計算時間である。既存手法は乱数シミュレーションであるので、一定の精度で Hawkes 過程の CVaR を得ようとするならば相応の計算時間を必要とするが、過大な計算時間は望ましくない。そこで、Hawkes 過程の CVaR を効率的に計算する手法を開発したいと考えた。

## 3 提案手法

提案手法は、主に二つの先行研究を参考にしている。第一に、特性関数を利用して CVaR を効率的に計算する手法の先行研究[2]である。その手法では、計算途中で特性関数を必要とすることから、第二の文献として[3]による Hawkes 過程の特性関数を求める手法を参考にした。二つの内容を組み合わせ、さらに改良を加えることで、効率的に Hawkes 過程の CVaR を求めた。

[2]によると、一般的な確率変数 $N$ に対して CVaR は、

$$\min_x \left\{ x - \frac{e^{vx} h}{2\pi(1-\alpha)} \sum_{k=-M}^{M-1} e^{-ikhx} \frac{\Phi_N(kh + iv)}{(kh + iv)^2} \right\} \quad (5)$$

で計算できる。この式は導出途中でフーリエ変換を利用しており、 $h$  はその近似の刻み幅、 $M$  は分割数である。 $v$  は負の値であり、 $\Phi_N$  は特性関数を表す。Hawkes 過程に対して(5)式を利用するため、Hawkes 過程の特性関数 $\Phi_N$ を求める必要がある。

[3]によると、範囲 $[0, T]$ のイベント数を $N$ とおくことにすると、Hawkes 過程の特性関数 $\Phi_N(z)$ は、

$$\Phi_N(z) = \exp(a(0) + \lambda_0 b(0)) \quad (6)$$

をみたす。ただし、 $a(t)$ 、 $b(t)$ は以下を満たす。

$$\frac{db(t)}{dt} = \kappa b(t) + 1 - \exp(\delta b(t) + z),$$

$$\frac{da(t)}{dt} = -\kappa cb(t),$$

$$a(T) = b(T) = 0$$

以上から、Hawkes 過程の CVaR を計算することが可能となる。本研究では、(5)式の最小値を三分探索を利用して求める。範囲 $[0, x_{max}]$ を設定して実行を行い、幅が $\varepsilon$ 以下の時を終了条件とする。

## 4 数値実験

モデリングをした現象は「連鎖倒産」であり、使用したデータは「R&I の格下げ変更日データ (期間 1999/1~2019/2) のうち、BB+以下への格下げの件数」である。格付とは企業の業績に応じたグレードのことであるが、一定水準 (今回は BB+以下) を下回った企業を倒産とみなすことで、倒産現象のデータとして連鎖性を分析することが可能となる。なお、推定は最尤推定で行われる [6] が、今回は武蔵野大学の山中卓先生にご助力をいただき、強度パラメータ  $(\lambda_0, c, \delta, \kappa) = (1.216, 1.216, 2.726, 4.039)$  を譲り受けた。また、既存手法、提案手法はいずれも  $T = 1, \alpha = 0.95$  とした。

まず、既存手法の結果を紹介する。10 万のサンプルパス数での Hawkes 過程の分布が図 1 である。上位 1~5000 番の平均が 95%CVaR であり、11.1170 であった。

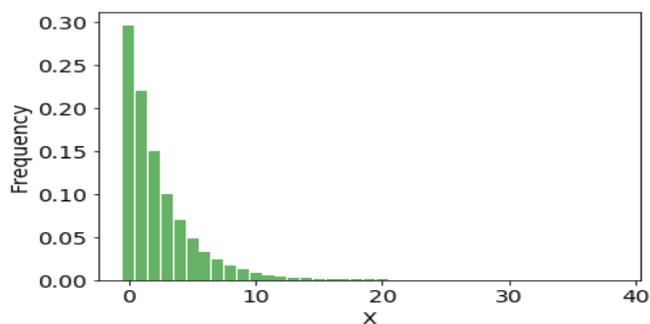


図 1. 10 万パスでのイベント発生数の分布

既存手法は乱数シミュレーションであり、CVaR は再度同じ値をとるとは限らない。そこで、複数回 CVaR を発生させて、CVaR の取る 95%信頼区間を求めた。

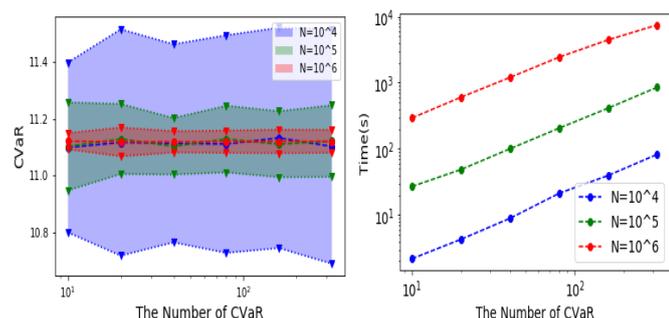


図 2. CVaR の数と CVaR の 95%信頼区間・計算時間

表 1. CVaR が 320 個のときの 95%信頼区間・計算時間

パス数 N	CVaR の 95%区間	計算時間
$10^4$	10.7258~11.5321	約 90s
$10^5$	11.0050~11.2373	約 700s
$10^6$	11.0766~11.1596	約 7000s

次に、提案手法による結果を紹介する。  $v = -0.01, x_{max} = 100, \varepsilon = 10^{-9}, h = 0.001, dt = 0.01$  として、 $\Sigma$  の計算の分割数  $M$  を 2000 として (5) 式を計算した。

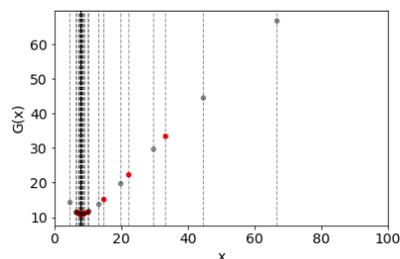


図 3. 三分探索による式 (5) の計算

これらのパラメータは理論評価に基づいておらず、例えば  $M$  が少ない場合は妥当な値を取らない場合がある。実際  $M$  と CVaR を計算したところ図 4 になった。

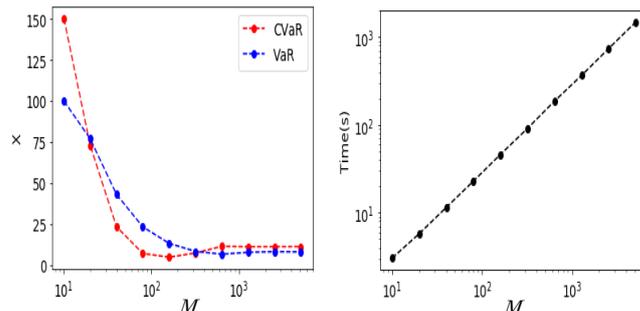


図 4. 分割数  $M$  と CVaR・計算時間

表 2. 分割数  $M$  と CVaR・計算時間

分割数 $M$	CVaR	計算時間
10	150.4055	約 2s
$10^2$	5.3089	約 20s
$10^3$	10.9357	約 200s

## 5 結論

Hawkes 過程の CVaR を、特性関数を用いて効率的に計算する手法を開発した。また、この手法による計算時間は、強度パラメータに依らない点が利点である。課題は、パラメータの理論評価ができていないという点である。これを解決できれば、既存手法を上回る効率的な手法となる可能性がある。

## 参考文献

- [1] A. Hawkes: Spectra of some self-exciting and mutually exciting process, *Biometrika*, 58(1971), pp. 83-90.
- [2] A. Ramponi: On a transform method for the efficient comutation of conditional V@R (and V@R) with application to loss models with jumps and stochastic volatility. *Methodol Comput Appl Probab.* 18(2016), pp. 575-596.
- [3] E. Errais, K. Giesecke, and L. R. Goldberg: Affine point processes and portfolio credit risk, *SIAM J. financial Math.* 1 (2010), pp. 642-665.
- [4] K. Giesecke, H. Kakavand, and M. Mousavi: Simulation point processes by intensity projection. *Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference*, IEEE Press, 2008, pp. 560-568.
- [5] M. Miyake, T. Ikegami, M. Oka, Y. Hasahimoto: Web data analysis with Hawkes process and histogram bin-width optimization, *JSAL*, 2017.
- [6] S. Yamanaka, H. Nakagawa, M. Sugihara: Modeling Credit Risk Contagion with Hawkes Process and its Application, *BJSIAM*, 27(2017), pp. 5-12.
- [7] Y. Ogata: On Lewis' simulation method for point processes, *IEEE Transactions on Information Theory*, 27(1981), pp. 23-31.
- [8] X. Gao, X. Zhou, and L. Zhu: Transform analysis for Hawkes process with applications in darl pool trading, *Quantitative finance*, 18(2018), pp. 265-282.
- [9] 近江崇宏: 東京大学大学院の講義「複雑数理システム論」の講義で用いたプログラム演習