修士論文 要旨

ノイズを含む結合振動子系の同期現象に関する研究

数理情報学専攻 48186215　松木 彩星

指導教員　田中 剛平 特任准教授

1　はじめに

振動現象は物理系や生物系，化学系などに幅広く現れる．振動子集団の同期現象は，生物・無生物・人工システムが正しく機能する上で重要な役割を果たす．例えば，脳ではニューロンの同期的な活動によって情報を表現する．また，近年，ニューロン集団の同期度が大きくゆらぐこと，そのような同期度ゆらぎが正常な脳機能を支えていることがわかってきた [1]．結合振動子系では，ノイズを受けた状態でこれらの適切な同期状態が実現される．本研究では，ノイズを含む結合位相振動子系と結合 Stuart-Landau 振動子系を用いて同期度と同期度ゆらぎを解析する．

2　ノイズを含む結合位相振動子系の同期現象

位相振動子は，状態を位相のみによって記述するモデルである．ノイズや振動子間相互作用などの外部からの作用が小さい系は結合位相振動子に近似される [2]．

2.1　結合位相振動子系の秩序変数の期待値

ノイズを含む結合位相振動子系

$$\dot{\phi}_i(t) = \omega + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} f(\phi_j - \phi_i) + \xi_i(t). \qquad (1)$$

を考える．ただし，$\phi_i(t)$ は時刻 t における振動子 i の位相，ω は固有周波数，$A_{ij} \leq 0$ は振動子 j から振動子 i への有向エッジの結合強度を表す $N \times N$ 行列の成分，f は 2π 周期結合関数，$\xi_i(t)$ は独立ガウシアン白色ノイズである．すなわち，任意の時刻 t, t_1, t_2 に対して，$\langle \xi_i(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle = \eta_i \delta_{ij} \delta(t_1 - t_2)$ が成立する．ただし，$\langle \cdot \rangle$ は期待値を表し，$\eta_i \leq 0$ は振動子 i に加わるノイズの強度である．

ネットワークラプラシアンは次のように定義される：

$$L_{ij} = \begin{cases} -A_{ij} & i \neq j, \\ \sum_{i' \neq i} A_{ii'} & i = j. \end{cases} \qquad (2)$$

先行研究 [3] は，L が対称行列であるとき，秩序変数の期待値がネットワークラプラシアンの固有値と固有ベクトルを用いて次のように記述されることを示した：

$$\langle r \rangle = 1 - \frac{Q}{2}, \qquad (3)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \eta_i, \qquad (4)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2N} \sum_{n=2}^{N} \frac{(u_i^{(n)})^2}{\lambda_n}. \qquad (5)$$

ただし，λ_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ はラプラシアン L の固有値，$\boldsymbol{u^{(n)}} = (u_1^{(n)} u_2^{(n)} \ldots u_N^{(n)})^T, (n = 1, 2, \ldots, N)$ はそれらに対応する右固有ベクトルである．

2.2　結合位相振動子系の秩序変数の分散

本研究では同様の解析手法により，秩序変数の分散を導出した．ラプラシアンが対称のとき，次のように記述される．

$$\left\langle (r - \langle r \rangle)^2 \right\rangle = \frac{S}{4}, \qquad (6)$$

$$S = \sum_{i,j=1}^{N} \beta_{ij} \eta_i \eta_j, \qquad (7)$$

$$\beta_{ij} = \frac{2}{N^2} \sum_{m,n=2}^{N} \frac{u_i^{(m)} u_i^{(n)} u_j^{(m)} u_j^{(n)}}{(\lambda_m + \lambda_n)^2}. \qquad (8)$$

2.3　ネットワークと同期状態

ネットワークを生成し，それらに対して以上の解析を適用することで，秩序変数の期待値と分散を計算することができる．ネットワークトポロジーと秩序変数の期待値・分散に関する次の 3 つの性質を明らかにした．

- 結合密度の冪乗に比例して，秩序変数の期待値は減少し，分散は増加する．
- 低次数ノードは秩序変数の期待値・分散に対して大きな寄与を持つ．
- 不均一なノイズを仮定した場合，スケールフリーネットワークは高い同期度と大きな同期度ゆらぎを実現する．

3　ノイズを含む結合 Stuart-Landau 振動子系の同期現象

Stuart-Landau 振動子は，安定固定点の不安定化によって振動が発生するという現象，すなわち Hopf 分岐を持つ力学系の挙動を簡潔に記述したモデルである．単一の Stuart-Landau 振動子は，分岐パラメータの符号に応じてリミットサイクルをもつ（活性状態）か，安定固定点をもつ（不活性状態）．近年，脳の同期度ゆらぎの研究で，不活性ノードを含む結合 Stuart-Landau 振動子系が注目されている [4]．本研究では，結合 Stuart-

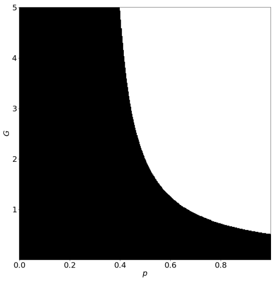

図 1. N 個の Stuart-Landau 振動子からなり全結合ネットワークを持つ系の Hopf 分岐．$a_+ = 0.5, a_- = -1$．黒い部分が振動領域である．

Landau 振動子系を用いて不活性化に伴う Hopf 分岐を解析するとともに，数値実験により，同期度と同期度ゆらぎを解析する．

3.1 不活性ノードを含む結合 Stuart-Landau 振動子系の Hopf 分岐

結合 Stuart-Landau 振動子系

$$\dot{z_j} = (a_j + i\omega - |z_j|^2)z_j + G\sum_{k=1}^{n} A_{jk}(z_k - z_j) + \xi_j(t) \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{9}$$

に対して安定性解析を行う．ただし，ノード j が活性なら $a_j = a_+ > 0$，不活性なら $a_j = a_- < 0$．ここでは，ネットワークは全結合であるとする．図 1 に結果を示す．黒い部分が振動領域である．また，分岐点近傍における活性・不活性ノードの振幅比は，

$$\frac{\rho_-}{\rho_+} \approx \frac{a_+(dG - a_-)}{dG(a_+ - a_-)}. \tag{10}$$

ただし，ρ_+, ρ_- はそれぞれ，活性・不活性ノードの振幅である．結合強度が大きい場合には，活性・不活性ノードが同程度の振幅を持ち，小さい場合には，不活性ノードの振幅が活性ノードの振幅に比べて非常に小さい．

3.2 数値実験

式 (9) で表される結合 Stuart-Landau 振動子系を用いて数値実験を行う．ただし，$a_+ = 0.2, a_- = -0.6$．$\omega = 0.05 \times 2\pi$[Hz]，ノイズ強度 $\eta_j = 0.02$ とする．大脳皮質のネットワークを持つ系に対するパラメータ空間解析結果を図 2 に示す．結合強度が大きい場合に，Hopf 分岐点近傍において同期度ゆらぎが大きくなることがわかる．図 3 に Hopf 分岐点近傍における秩序変数の時間変動を示す．大域的結合強度が大きい場合には，準安定的な同期状態を遷移するのに対し，小さい場合には，秩序変数が一定値にノイズが加わったような時間変動を示す．

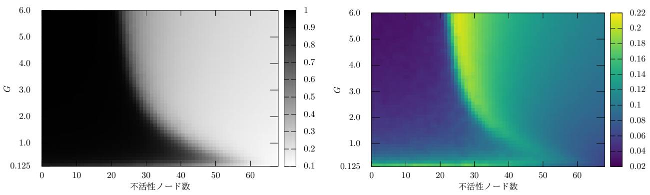

図 2. 大脳皮質の構造的結合ネットワークの同期度時間平均（左），標準偏差（右）．Hopf 分岐点近傍において標準偏差が大きくなる傾向があるが，標準偏差のピークが大きいのは結合強度が大きい時である．

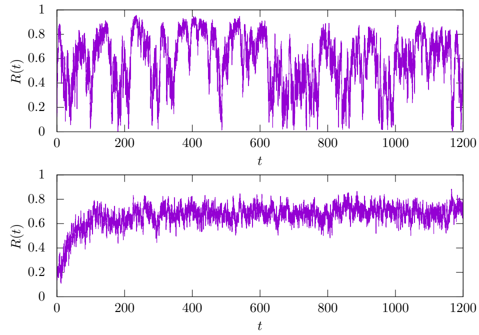

図 3. 大脳皮質結合ネットワークを用いた場合のシミュレーション．上：$G = 6.0$，下：$G = 0.5$．

4 まとめと今後の課題

ノイズを含む結合振動子系の同期度と同期度ゆらぎを解析した．結合位相振動子系に対する解析では，ネットワークトポロジーと同期度，同期度ゆらぎに関するいくつかの性質を明らかにした．また，結合 Stuart-Landau 振動子系の解析では，結合強度が大きい場合に，Hopf 分岐点近傍において大きな同期度ゆらぎが見られることを明らかにした．本研究では固有周波数が均一であることを仮定したが，不均一性を持つ系の解析は今後の課題である．

参考文献

[1] J. A. S. Kelso. Metastable coordination dynamics of brain and behavior. *Japanese Neural Network Society*, 8(4):125–130, 2001.

[2] Y. Kuramoto. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Courier Corporation, 2003.

[3] Y. Katoh and H. Kori. Noise stability of synchronization and optimal network structures. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 30(1):013148, 2020.

[4] G. Deco, M. L. Kringelbach, V. K. Jirsa, and P. Ritter. The dynamics of resting fluctuations in the brain: metastability and its dynamical cortical core. *Scientific Reports*, 7(1):3095, 2017.