

Characterizing non-stationary stochastic dynamics via horizontal visibility graph motifs

(Horizontal visibility graph のモチーフによる
非定常で確率的なダイナミクスの特徴づけ)

数理情報学専攻 48186222 吉良綾人
指導教員 平田祥人 准教授

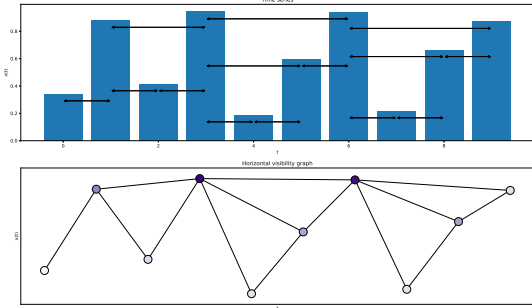


図 1. 時系列 (上) と対応する HVG (下).

表 1. 長さ 4 のモチーフ [2].

番号	モチーフの形	番号	モチーフの形
1		2	
3		4	
5		6	

定義 1 (Horizontal visibility graph [1]). $(y_t)_{t=1}^N$ を N 点の 1 変量実数値時系列とする. グラフ $G = (\{1, \dots, N\}, E)$ の任意の 2 つの頂点 $i < j$ が, 次の条件を満たすとき, G を $(y_t)_{t=1}^N$ に対応する horizontal visibility graph (HVG) と言う: $(i, j) \in E \iff \min\{y_i, y_j\} > y_t$ for all t such that $i < t < j$.

独立同一分布に従う確率変数の列から作った HVG の次数分布はその分布によらないことが示されている [1]. そのため, HVG を用いて, 時系列が独立同一分布から生成されたものであるか判定することができる.

以下, HVG の時間的に連続する n 頂点からなる部分グラフを長さ n のモチーフと呼ぶ. 頂点の時刻を一つずつずらして作ったモチーフの列を sequential HVG n -node motifs という [2]. 本研究では, モチーフの分布を使って時系列の特徴を捉える手法を提案する.

3 モチーフの数の計算

先行研究では, 全てのモチーフを列挙することができる, 短いモチーフを使った分析が行われている. 例えば, 長さ 4 のモチーフは 6 種類存在する (表 1) [2]. しかし, 一般の長さ n のモチーフが何種類存在するかは, 知られていない. そこで, 本研究では, 次の定理を証明した.

定理 1. 長さ n の時系列 $y^n = (y_0, \dots, y_{n-1})$ が, 任意の $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ に対して $i \neq j \Rightarrow y_i \neq y_j$ を満たすとする. このとき, y^n に対応する HVG のモチーフは $p_n = (2n-2)!(n!(n-1)!)^{-1}$ 通り存在する.

この結果から $p_n < 4^{n-1}$ が導かれる. これは, HVG

1 はじめに

時系列をグラフに変換する手法は, 時系列解析に複雑ネットワークの理論を応用できるため, 非線型ダイナミクスの研究における近年のトレンドとなっている. その中で, horizontal visibility graph (HVG) [1] は, その理論的性質やシンプルなアルゴリズムで高速に作成できることから, 新しい時系列解析の手法として注目を集めている. HVG は, 時刻に対応する頂点が, 時系列の値の高さから水平に前後を見たときに, 相手の頂点が見える, あるいは, 相手の頂点から見られるという関係にある場合に, その頂点との間に枝を張ることで構築される (図 1). 本研究では, HVG のモチーフ (小さな部分グラフ) に着目し, HVG が非線型で確率的なダイナミクスの特徴づけにも適用できるかを調べた. 本研究の主な成果は次の 3 つである. 一つは, HVG のモチーフの数が, モチーフの長さ (頂点数) を変化させた時にどのように大きくなるか, その増加速度を解析的に求めたことである. 二つ目は, HVG のモチーフの分布を使って, 対象に影響を与えているゆっくりとした外力の成分を推定する手法を提案したことである. 最後は, HVG のモチーフの分布から, 二つの時系列の方向性結合を検定する手法を提案したことである.

2 背景

まず, HVG の定義は以下の通り.

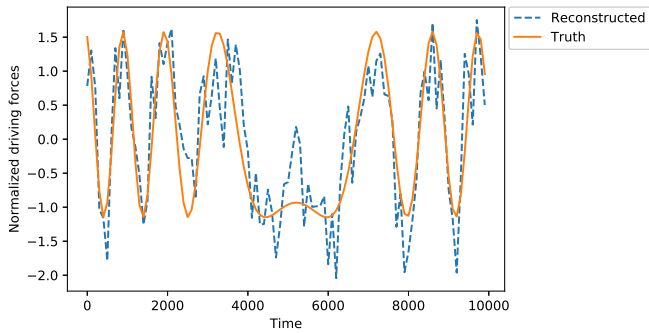


図 2. 時系列モデルに含まれるゆっくりとした外力 (青実線) を時系列データから作った HVG のモチーフを用いて再構成した (橙破線).

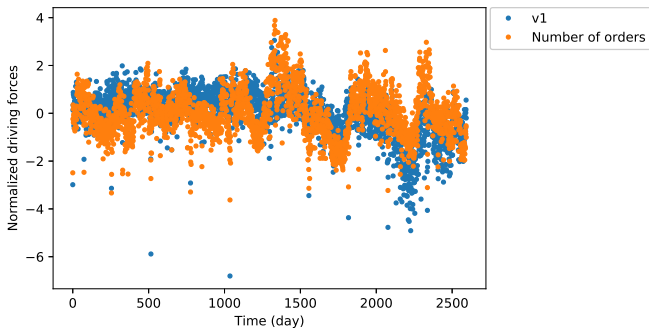


図 3. 為替レートの 1 分値時系列から取り出した外力 (青) と 1 日の注文数 (橙).

のモチーフの種類が増え方が、順列ヤリカレンス・プロットより遥かに遅いことを意味する。なお、表 1 の 2 番のモチーフは、本定理で考えている p_4 種類には含まれない。

4 ゆっくりとした外力の再構成

時系列を生成するダイナミクスの時間変化する特徴を、HVG のモチーフの出現頻度の変化から読み取る手法を提案した。本手法では、時系列データから HVG のモチーフを作り、一定時間ごとに集計した頻度の行列を作る。出来た行列を特異値分解することで、ゆっくりと変化する外力の成分を取り出すことができる (図 2)。為替の時系列に本手法を適用した結果、1 分値の価格変動と注文数の関係が見出された (図 3)。一方で、HVG のモチーフの分布を使った手法は、線型なモデルに対しては適用できないという結果が得られた。これは、HVG がスケール変換に対して不変であることが要因である。

5 方向性結合の検定

二つの時系列データの方向性結合を検定するため、HVG のモチーフの分布から transfer entropy [3] を計算する手法を提案した。本手法を使って、人工データ

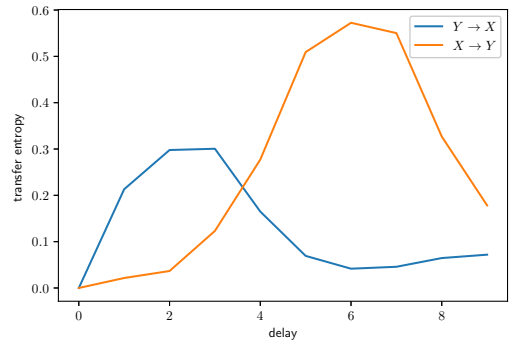


図 4. 結合したロジスティック写像の transfer entropy.

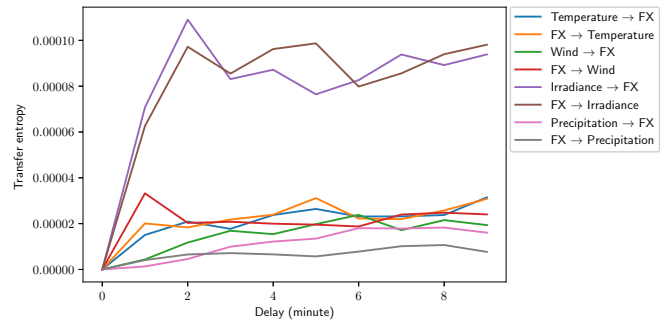


図 5. 為替レートの時系列と気象の時系列 (1 分値) の transfer entropy.

(図 4) と、為替や気象といった実データ (図 5) の分析を行い、為替時系列と日射量の 1 分値は独立ではないという結果を得た。

6 結論

HVG のモチーフの存在し得る数が頂点の数の増加に対して指数関数的に増える。この結果は他の類似手法と比べて遅いことから、頂点数の多いモチーフを使った分析が可能である。記号力学の文脈では、長さ n のモチーフを使うことで、相空間をおよそ 4^n 個に分割していると見なすことができる。この分割の増え方では、時系列を完全に特徴づけることはできないが、実用上は非線型ダイナミクスに対する外力の再構成や、方向性結合の検出に使えることが明らかとなった。

References

1. Luque, B., Lacasa, L., Ballesteros, F. & Luque, J. Horizontal visibility graphs: exact results for random time series. *Physical Review E* **80**, 046103 (4 2009).
2. Iacovacci, J. & Lacasa, L. Sequential visibility-graph motifs. *Physical Review E* **93**, 042309 (4 2016).
3. Schreiber, T. Measuring information transfer. *Physical Review Letters* **85**, 461–464 (2 2000).