

マッチング問題に対する行列スケーリングの研究

数理情報学専攻 48186202 井上 恭輔

指導教員 平井 広志 准教授

1 はじめに

$A = (a_{ij})$ を非負正方行列とし、零行および零列が存在しないものとする。 $X(A)$ を i 番目の対角要素が $(\sum_j a_{ij})^{-1}$ である対角行列とし、 $Y(A)$ を j 番目の対角要素が $(\sum_i a_{ij})^{-1}$ である対角行列とする。このとき、 A に左から $X(A)$ を掛ける操作と右から $Y(A)$ を掛ける操作を交互に繰り返す手法、つまり A の各行と各列を交互に正規化する手法を行列スケーリングという。行列スケーリングの概念は統計分野で Sinkhorn[9] によって生み出された。統計分野以外にも数値解析における丸め誤差 [10] やオペレーションズ・リサーチ [8]、画像再構成 [5] などにおいて行列スケーリングが活用されている。

2 既存研究

Sinkhorn[9] は各要素がすべて正である正方行列に関して行列スケーリングを行うと 2 重確率行列に収束することを示している。ここで、『収束』は、2 重確率行列そのものになるという意味ではなく 2 重確率行列にいくらでも近づくという意味で使用している。また、[9] では一部の要素が 0 となっている正方行列に関しても一例を示しているが、収束性に関する詳細な性質は分かっていなかった。

Linial, Samorodnitsky, Wigderson[7] は 2000 年に行列スケーリングによって非負行列が 2 重確率行列に収束するための必要十分条件は、対応する二部グラフに完全マッチングが存在することであることを示した。Linial らは、この事実に基づいて、完全マッチングの存在を判定する多項式時間アルゴリズムを与えている。このアルゴリズムは従来の増加パスに基づくアルゴリズムとは根本的に異なっており、非常に興味深いものである。また、Linial らはマッチング問題だけでなくパーマネントの計算にも行列スケーリングを活用し、決定的な e^n -近似アルゴリズムを構築した。

2004 年に Gurvits[4] により、行列スケーリングは作用素スケーリングへと拡張された。さらに、最近になって Garg, Gurvits, Oliveira, Wigderson[3] によって、作用素スケーリングは変数付き行列 $\sum_i A_i x_i$ の nc-正則性の判定 [2] など、様々な応用をもつことが示され、大

きな展開を見せている。行列スケーリングに対するより高速なアルゴリズムを実装する研究 [1] や行列スケーリングおよび作用素スケーリングのスペクトル分析に関する研究 [6] も行われている。

3 本研究の貢献

本研究では、まず対応する二部グラフが完全マッチングを持つ場合、持たない場合と比べて [7] のアルゴリズムにおける行列スケーリングの反復回数が非常に少なくなることを、様々な方法でランダムに定めた 0-1 行列を入力として実験的に確認した。さらに [7] で示されているパーマネント計算の近似率が理論的に正しいことも実験的に確認した。

また、[7] で示されている二部グラフの完全マッチングの存在判定アルゴリズムは、完全マッチングが存在する場合は比較的速く終了するが、完全マッチングが存在しない場合は行列スケーリングを最大回数行うことでその非存在性が保証される。そこで本研究では、行列スケーリングは対称キャパシティの交互最適化問題に帰着できることに着目して A に対応する二部グラフに完全マッチングが存在しない場合でも $X(A)$ および $Y(A)$ が収束すると予想し、もしその予想が正しければ完全マッチングが存在しない場合でも速く終了する二部グラフの完全マッチングの存在判定アルゴリズムを構成できることを実験的に確認した。

4 完全マッチングを持つ場合

行列スケーリングを用いた [7] の完全マッチングの存在判定アルゴリズムについて、入力 $n \times n$ 0-1 行列 $A = (a_{ij})$ の各要素の値が 1 となる確率を p_{ij} とし、確率ベクトル $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ を用いて

$$p_{ij} = \frac{p_i + q_j}{c}$$

で表せるとする。 A に対応する二部グラフが完全マッチングを持つとき、 c が定数の場合および $c = O(n)$ で表せる場合に関してアルゴリズムが終了するまでの行列スケーリングの反復回数を計測したところ、最大回数 $n^2 \log n$ と比べて大幅に減少していることが確認できた。

5 完全マッチングを持たない場合

本研究では、行列スケーリングが対称キャパシティの交互最適化問題に帰着できることから、 A が行列スケーリングで 2 重確率行列に収束するかどうか関係なく $X(A), Y(A)$ が収束すると予想した。この予想が正しければ、マッチング問題の LP 表現に Farkas の補題を適用すると完全マッチングが存在しないための条件

$$p_i < q_j (\forall ij \in E)$$

が得られ、[7] にその条件を加えたアルゴリズムが以下の通りとなる。

Algorithm 1 行列スケーリングによる完全マッチングの存在判定の改善

```

 $A \leftarrow 0\text{-}1 \text{ matrix}$ 
for  $n^2 \log n$  iterations do
     $A \leftarrow X(A) \cdot A$ 
     $A \leftarrow A \cdot Y(A)$ 
    if  $\sum_{i=1}^n (A\mathbf{1} - \mathbf{1})_i^2 < \frac{1}{n}$  then
        Return “Perfect Matching”
        Break
    end if
    Calculate  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  from  $X(A), Y(A)$ 
    if  $p_i < q_j (ij \in E)$  then
        Return “No Perfect Matching”
        Break
    end if
end for
Return “No Perfect Matching”
    
```

対応する二部グラフが完全マッチングを持たないような入力の 0-1 行列の定め方は修論本文を参照する。行列の大きさを n とすると、対応する二部グラフが完全マッチングを持たない場合既存手法 [7] では反復回数が $n^2 \log n$ となる。これに対して、提案手法 (Algorithm 1) では横軸を n 、縦軸を行列スケーリングの反復回数としてグラフで表すと図 1 の通りとなった。

提案手法における行列スケーリングの反復回数が既存手法のそれよりはるかに小さくなったため、完全マッチングを持たない場合 Algorithm 1 における計算時間は [7] でのそれより格段に速くなることが期待される。しかし、上記の A の入力が入力が反復回数が小さくなる特別な場合であることも考えられ、完全マッチングを持たな

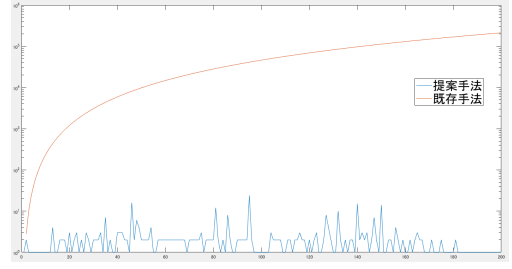


図 1. 提案手法 (Algorithm 1) と既存手法における行列スケーリングの反復回数の比較

い他の入力において図 1 よりも反復回数が多くなる可能性があることも考察できる。

今後の課題として、 $X(A), Y(A)$ の収束性に対して理論的な証明を与えることや作用素スケーリングによる変数付き行列の nc-正則性判定アルゴリズムへ拡張させることなどが挙げられる。

参考文献

- [1] Z. Allen-Zhu, Y. Li, R. Oliveira, and A. Wigderson, Much faster algorithms for matrix scaling, *Proceedings of the 2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science(FOCS)*, 890–901, 2017.
- [2] J. Edmonds, Systems of distinct representatives and linear algebra, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 71:241–245, 1967.
- [3] A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson, Operator Scaling: Theory and Applications, *Foundations of Computational Mathematics*, First online May 6, 2019.
- [4] L. Gurvits, Classical complexity and quantum entanglement, *Journal of Computer and System Sciences*, 69(3):448–484, 2004.
- [5] G. T. Herman, and A. Lent, Iterative reconstruction algorithms, *Computers in Biology and Medicine*, 6(4):273–294, 1976.
- [6] T. C. Kwok, L. C. Lau, and A. Ramachandran, Spectral analysis of matrix scaling and operator scaling, *Proceedings of the 2019 IEEE 60th Annual Symposium on Foundations of Computer Science(FOCS)*, 1184–1204, 2019.
- [7] N. Linial, A. Samorodnitsky, and A. Wigderson, A deterministic strongly polynomial algorithm for matrix scaling and approximate permanents, *Combinatorica*, 20(4):545–568, 2000.
- [8] T. E. S. Raghavan, On pairs of multidimensional matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 62:263–268, 1984.
- [9] R. Sinkhorn, A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices, *The Annals of Mathematical Statistics*, 35:876–879, 1964.
- [10] J. H. Wilkinson, *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Dover Publications, New York, 1994.