修士論文 要旨

低ベータ簡約化MHD方程式に対する構造保存数値解法

数理情報学専攻 48176214 坪井 俊憲
指導教員 松尾 宇泰 教授

1 はじめに

近年，南部括弧構造に基づく偏微分方程式の数値解法に注目が集まっている．南部括弧は Hamilton 系における Poisson 括弧を一般化した括弧記号で，流体力学の分野で現れる偏微分方程式の多くが南部括弧により記述できることが知られている．南部括弧の多重歪対称性を引き継ぐ離散化を行うことで，2 つ以上の保存量を保つ数値解法を自然に構成できる場合があることが知られている [3,4]．

本研究では，プラズマ研究でしばしば用いられる低ベータ簡約化 MHD（RMHD）方程式に対する数値解法を考える．2 次元 RMHD 方程式は無限個の保存量を持つ偏微分方程式で，Hamilton 系である．さらに，総エネルギーとクロスヘリシティを Nambu–Hamiltonian とする南部括弧表現が知られている [1]．

本研究では，2 次元 RMHD 方程式に対する代表的な構造保存解法の一つである Kraus，Tassi，Grasso の解法（KTG スキーム） [2] が南部括弧の括弧離散化により自然に導出できることを確認し，これを 2 通りの方法で拡張する．1 つ目の拡張は，RMHD 方程式の新たな南部括弧表現を導出し，これに基づき構造保存数値解法が構成できることを示す．2 つ目の拡張は，南部括弧を多点離散変分導関数を用いて時間離散化することにより，KTG スキームを高速化した解法を構成する．さらに，これらの手法を計算機上に実装し計算速度や安定性について議論する．

2 既存研究

2 次元 RMHD 方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = [\omega, \varphi]_{\mathrm{J}} + [\psi, j]_{\mathrm{J}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = [\psi, \varphi]_{\mathrm{J}} \tag{2}$$

により与えられる (ω, ψ) に関する偏微分方程式である．ただし，ω は流体の渦度，ψ はポロイダルフラックス，$\varphi := \Delta_\perp^{-1}\omega$ は流れ関数，$j := \Delta_\perp \psi$ は電流密度である．また，

$$[u, v]_{\mathrm{J}} := \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\Delta_\perp := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

はそれぞれ Jacobian，Laplacian である．

2 次元 RMHD 方程式 (1, 2) は総エネルギー

$$H := {}^1\!/\!{}_2 \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left(\left\| \nabla_\perp (\Delta_\perp^{-1}\omega) \right\|^2 + \|\nabla_\perp \psi\|^2 \right)$$

とクロスヘリシティ $C^0 := \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \omega\psi$ を Nambu–Hamiltonian として，南部括弧

$$\begin{aligned}
&\left\{F, C^0, H\right\}_{\mathrm{KT}}[u] \\
&:= -\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \left(\frac{\delta F}{\delta \psi}\left[\frac{\delta C^0}{\delta \omega}, \frac{\delta H}{\delta \omega}\right]_{\mathrm{J}} + \frac{\delta C^0}{\delta \psi}\left[\frac{\delta H}{\delta \omega}, \frac{\delta F}{\delta \omega}\right]_{\mathrm{J}} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\delta H}{\delta \psi}\left[\frac{\delta F}{\delta \omega}, \frac{\delta C^0}{\delta \omega}\right]_{\mathrm{J}} \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

に基づき

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \left\{\mathcal{I}^\omega_{\boldsymbol{x}}, C^0, H\right\}_{\mathrm{KT}}, \quad \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \left\{\mathcal{I}^\psi_{\boldsymbol{x}}, C^0, H\right\}_{\mathrm{KT}}$$

と書くことができる [1]．ただし，$\mathcal{I}^a_{\boldsymbol{x}}$ は受け取った関数の第 a 成分の位置 $\boldsymbol{x}$ における値を返す汎関数である．

Kraus ら [2] は 2 次元 RMHD 方程式に対する次の構造保存的解法を構成した．

数値解法 2.1 (*KTG* スキーム *[2]*)

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_{ij}^{(n+1)} - \Omega_{ij}^{(n)}}{\Delta t} &= \left[\Omega^{(n+1/2)}, \Phi^{(n+1/2)}\right]_{\mathrm{A},ij} \\
&\quad + \left[\Psi^{(n+1/2)}, J^{(n+1/2)}\right]_{\mathrm{A},ij}, \\
\frac{\Psi_{ij}^{(n+1)} - \Psi_{ij}^{(n)}}{\Delta t} &= \left[\psi^{(n+1/2)}, \Phi^{(n+1/2)}\right]_{\mathrm{A},ij}.
\end{aligned}$$

ただし $U^{(n+1/2)} := \left(U^{(n+1)} + U^{(n)}\right)/2$ $(U = \omega, \psi, \varphi, J)$ で，$[\circ, \circ]_{\mathrm{A},ij}$ は *Arakawa Jacobian* である．

この数値解法は H と C^0 を始めとする 4 つの保存量を数値的に保存することが報告されている [2]．

3 提案手法

数値解法 2.1 は南部括弧 (3) の括弧離散化から自然に導出できることが示せる．これにより，KTG スキームが H, C^0 を厳密に保存することが容易に示せる．本研究では，この結果を以下の 2 通りの方法で拡張する．

表 1: Orszag–Tang 渦問題を $t=1$ まで計算したときの保存量の相対変化率，計算時間の平均値．赤文字は離散汎関数を厳密に保存，青文字は 2 点離散汎関数を保存．ただし，$D^{1'} := \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,(\psi + 3.3)^3$ である．

	非線型性	H	C^0	D^0	$C^{1'}$	$D^{1'}$	計算時間(s)
〈KTG〉	陰的 2 次	1.98E-14	-2.90E-14	4.46E-15	-9.47E-04	-1.18E-05	38.3
〈提案 1〉	陰的 3 次	7.38E-15	4.64E-04	-7.05E-03	-6.98E-15	3.46E-03	40.9
〈提案 3〉	陰的 1 次	3.60E-16	9.53E-06	-1.28E-04	-8.40E-04	-6.61E-05	20.7
〈比較 1〉	陰的 1 次	1.10E-14	-5.57E-02	1.86E-02	-5.60E-02	6.87E-03	14.6

3.1 新しい南部括弧

方程式 (1, 2) は $H, C := \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\omega f(\psi)$ を Nambu–Hamiltonian として，南部括弧

$$
\begin{aligned}
&\{F, C, H\}_{\mathrm{T}_1} \\
&:= -\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \frac{1}{f'(\psi)} \left(\frac{\delta F}{\delta \psi} \left[\frac{\delta C}{\delta \omega}, \frac{\delta H}{\delta \omega} \right]_{\mathrm{J}} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\delta C}{\delta \psi} \left[\frac{\delta H}{\delta \omega}, \frac{\delta F}{\delta \omega} \right]_{\mathrm{J}} + \frac{\delta H}{\delta \psi} \left[\frac{\delta F}{\delta \omega}, \frac{\delta C}{\delta \omega} \right]_{\mathrm{J}} \right)
\end{aligned} \tag{4}
$$

により記述できることが示せる．特に $f(\psi) = \psi$ とすると南部括弧 (4) は南部括弧 (3) の一般化になっていることが確認できる．同様に，H と $D := \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, g(\psi)$ を Nambu–Hamiltonian とする南部括弧表現も存在することが示せる．これらの新たに得られた南部括弧に KTG スキームと同様の括弧離散化を施すことで，H と C または D を保存する数値解法を構成できる．

3.2 陰的線型化

式 (3) に対し，通常の離散変分導関数の代わりに 3 点離散汎関数を用いて離散化すると，次の数値解法が得られる．

数値解法 3.1

$$
\begin{aligned}
\frac{\Omega_{ij}^{(n+1)} - \Omega_{ij}^{(n-1)}}{2\Delta t} &= \left[\Omega^{(n)}, \frac{\Phi^{(n+1)} + \Phi^{(n-1)}}{2} \right]_{\mathrm{A},ij} \\
&\quad + \left[\Psi^{(n)}, \frac{J^{(n+1)} + J^{(n-1)}}{2} \right]_{\mathrm{A},ij}, \\
\frac{\Psi_{ij}^{(n+1)} - \Psi_{ij}^{(n-1)}}{2\Delta t} &= \left[\Psi^{(n)}, \frac{\Phi^{(n+1)} + \Phi^{(n-1)}}{2} \right]_{\mathrm{A},ij}.
\end{aligned}
$$

この陰的線型解法は H を厳密に保存し，C^0 を 2 段離散化した

$$
C_{2\mathrm{d}}^0 := \frac{1}{2} \sum_{ij} \Delta x \Delta y \left(\Omega_{ij}^{(n)} \Psi_{ij}^{(n+1)} + \Omega_{ij}^{(n+1)} \Psi_{ij}^{(n)} \right)
$$

も保存する．また，数値解法 3.1 は陰的線型な解法のため，数値解法 2.1 よりも高速に求解できることが期待できる．同様に，C^0 を厳密に保存しつつ H を 2 段離散化した量も保存する陰的線型解法や，両方を 2 段離散化した陰解法も構成できる．

4 数値実験

KTG スキーム〈KTG〉と南部括弧 (4) に基づく解法〈提案 1〉，数値解法 3.1 〈提案 3〉を計算機に実装し，Orszag–Tang 渦問題に対する数値実験を行った．ただし，〈提案 1〉では H と $C^{1'}$ ($f(\psi) = (\psi + 3.3)^2$) を保存する解法を用いた．また，多段汎関数の保存の効果を確認するため，〈提案 3〉から多段 C^0 保存を除いた陰的線型解法である〈比較 1〉に対しても同様の実験を行った．なお，今回の設定では C^0 保存解法は D^0 ($g(\psi) = \psi^2/2$) も保存する．差分グリッドは $N_x \times N_y = 128 \times 128$，時間刻み幅は $\Delta t = 0.01$ とし，$t \in [\Delta t, 1]$ の区間の計算を行った．OS は Windows 10 Education，CPU は Intel Core i7-6820HQ，RAM は 16 GB の計算機環境で，プログラミング言語は Julia 1.0.2 を用いた．

それぞれの手法に対する数値実験結果を表 1 に示す．まず，〈提案 1〉では H と $C^{1'}$ を理論通り保存できていることが確認できる．また，〈提案 3〉は〈KTG〉よりも高速に求解できていて，比較用解法〈比較 1〉よりも質の良い解が得られていることが読み取れる．

参考文献

[1] D. A. Kaltsas and G. N. Throumoulopoulos. 2D magnetofluid models constructed by a priori imposition of conservation laws. *arXiv e-prints*, 2018. arXiv: 1809.10273 [physics.plasm-ph].

[2] M. Kraus, E. Tassi, and D. Grasso. Variational integrators for reduced magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, Vol. 321, pp. 435–458, 2016.

[3] R. Salmon. A general method for conserving quantities related to potential vorticity in numerical models. *Nonlinearity*, Vol. 18, No. 5, p. R1, 2005.

[4] 杉渕優也. 浅水方程式に対する複数保存スキームの構築. 修士論文, 東京大学, 2018.