

計算解剖学における関数形状モデルの拡張と ハイパーパラメータ推定

数理工学専攻 48176213 田中 智規

指導教員 清 智也 准教授

1 導入

計算解剖学とは、人体の解剖学的構造の体系的、数理的な計算機内表現（計算解剖モデル）とそれに基づく診断への応用の領域である [5]。計算解剖学の主な対象として、MRI (Magnetic Resonance Imaging) や CT (Computed Tomography) などにより得られる臓器画像（解剖図）が挙げられる。計算解剖学では、テンプレートと呼ばれる典型的な解剖図が用いられ、テンプレートと被験者の解剖図の位置合わせや異常度の定量化など、診断への応用が考えられている。

2 既存研究

計算解剖モデルの一つとして提案されているのが関数形状モデル [2] である。このモデルでは、臓器の形状だけでなく、臓器の「色」つまり臓器上に値を持つ関数も考慮できる。ここでは、臓器を表す多様体 $X \subset \mathbb{R}^n$ で、 X の次元を d 、色を表す関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ とする。また、 (X, f) を fshape (functional shape) と定義する。

関数形状モデルでは、テンプレートの fshape を (X_0, f_0) 、被験者の fshape を $(X_{\text{tar}}, f_{\text{tar}})$ として、以下の評価関数 $E(v, h)$ を考える：

$$\begin{aligned} E(v, h) = & \frac{\gamma_V}{2} \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt \\ & + \frac{\gamma_f}{2} \int_0^1 \int_{X_t} (h_t \circ (\Phi_t^v)^{-1}(x_t))^2 d\mathcal{H}^d(x_t) dt \\ & + \frac{1}{2} \|\mu_{(X_{\text{tar}}, f_{\text{tar}})} - \mu_{(X_1, f_1)}\|_{W^*}^2. \end{aligned}$$

ただし、 $0 \leq t \leq 1$ で、

$$(X_t, f_t) = \left(\Phi_t^v(X_0), \left(f_0 + \int_0^t h_s ds \right) \circ (\Phi_t^v)^{-1} \right),$$

Φ_t^v は $v_t \in V$ から生成される微分同相写像、 $h_t: X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ で二乗可積分な関数である。第 1 項、第 2 項の係数 γ_V, γ_f を本研究では、それぞれ形状変化パラメータ、関数変化パラメータと呼ぶ。第 3 項は varifold [3] を応用した fvarifold (functional varifold) という項である。ここで、 (X_1, f_1) を固定したとき、評価関数 $E(v, h)$ を最小とする v, h が存在する定理が [2] で示されている。

評価関数 $E(v, h)$ の最小値を $(X_{\text{tar}}, f_{\text{tar}})$ の異常度と定量化し、最適解における (X_1, f_1) で位置合わせを行いたい、 $E(v, h)$ の最小解や勾配を解析的に求められない。そこで、離散化 fshape および離散版の評価関数を考える。最大値原理 (cf. [1]) やアジョイント方程式 [4] により、離散版の評価関数の最小化を行うことができる。離散版の評価関数の最適値を異常度とし、最適解を用いて位置合わせを行う。

3 重み付き関数形状モデル

関数形状モデルには、評価関数 $E(v, h)$ の第 2 項により、どの位置で関数の値が変化しても、評価関数への寄与は一定であるという問題点がある。これにより、色の変化が解剖学的に重要な意味のある位置、重要でない位置が既知であっても、その情報を関数形状モデルに組み込むことはできない。その結果、重要でない位置での色の変化により異常値が大きくなる恐れがある。そこで、本研究では関数形状モデルに位置依存性を加えた、重み付き関数形状モデルを提案する。

位置依存性を表す関数を $\Gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ とする。重み付き関数形状モデルの評価関数 $E_\Gamma(v, h)$ を

$$\begin{aligned} E_\Gamma(v, h) = & \frac{\gamma_V}{2} \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{X_t} \Gamma(x_t) (h_t \circ (\Phi_t^v)^{-1}(x_t))^2 d\mathcal{H}^d(x_t) dt \\ & + \frac{1}{2} \|\mu_{(X_{\text{tar}}, f_{\text{tar}})} - \mu_{(X_1, f_1)}\|_{W^*}^2 \end{aligned}$$

とする。

本研究では、 Γ が正値かつ連続関数と仮定すると、 (X_1, f_1) を固定したとき、評価関数 $E_\Gamma(v, h)$ を最小とする v, h が存在することを示した。ここで、関数形状モデルでも同様の定理が成り立つ。加えて、既存の関数形状モデルと同じ設定である $\Gamma(x) = \gamma_f$ は仮定を満たす。つまり、提案モデルは既存モデルを含むモデルであり、既存モデルと同様の定理が成り立つ。

さらに、既存モデルと同様に離散化 fshape および離散版の評価関数を構成する。関数形状モデルの離散版の評価関数の最小化の手法をそのまま応用すると、 Γ の 2 回微分を行う必要がある。そこで、離散化 fshape に

において Γ が 2 回微分可能な関数であるというより強い仮定を加えれば、既存手法を用いて重み付き関数形状モデルの評価関数も最小化できる。既存モデルと同じ設定である $\Gamma(x) = \gamma_f$ はこの仮定も満たす。

4 数値実験

図 1 の膵臓 CT 画像 [6] に対し、左の解剖図をテンプレートとして、右の解剖図への位置合わせを関数形状モデルおよび重み付き関数形状モデルを用いて行った。

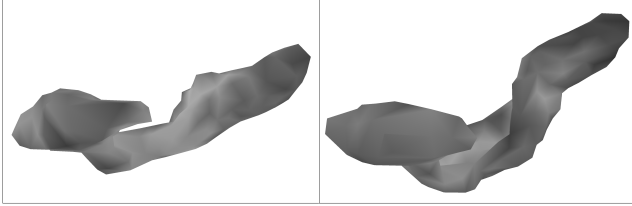


図 1. テンプレート (左) と目的の画像 (右)

$\gamma_V = 0.1$ として、関数形状モデルでは $\gamma_f = 0.1, 1$ として、重み付き関数形状モデルでは $\Gamma(x) = 0.1 + \exp(-\|x\|^2/50)$ としたときの位置合わせの結果が以下の図 2~4 である。

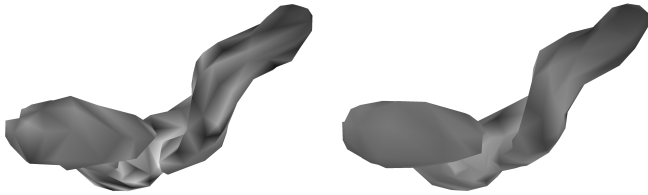


図 2. $\gamma_f = 0.1$ (既存モデル) の結果

図 3. $\gamma_f = 1$ (既存モデル) の結果

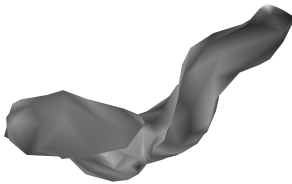


図 4. 重み付き関数形状モデルの結果

原点から離れた場所では、 $\Gamma(x) \approx 0.1$ のため、提案モデルの図 4 は図 2 に似た結果が得られ、色を変化させて目的の解剖図に近づいていることがわかる。一方、原点付近では $\Gamma(x) \approx 1$ であるため、提案モデルの図 4 は図 3 のようにテンプレートの色が保存されたまま目的の解剖図に近づいていることがわかる。このように、重み付き関数形状モデルでは、位置依存性を加えることで関数形状モデルよりも多様な位置合わせを行える。また、重み付き関数形状モデルでは、位置によって色の变化を抑制、促進できるとも捉えられる。

5 ハイパーパラメータ推定

関数形状モデルでは、形状変化パラメータ γ_V 、関数変化パラメータ γ_f の値によって結果が変わることが報告されている [2]。そこで、複数の観測から γ_V, γ_f を推定したい。そのために、関数形状モデルにおける確率モデルを構成する。この確率モデルでは、 γ_V, γ_f がハイパーパラメータとみなせる。その結果、ハイパーパラメータの推定手法による γ_V, γ_f の推定ができる。

5.1 EM アルゴリズムによる推定

複数の膵臓 CT 画像から EM アルゴリズムによる γ_V, γ_f の推定を行った。Q 関数の近似計算のため、事後分布からのサンプリングをメトロポリス・ヘイスティングス法で行い、サンプリング数を 20 とした。 $(\gamma_V, \gamma_f) = (0.1, 1)$ を初期値とした結果が図 5 である。

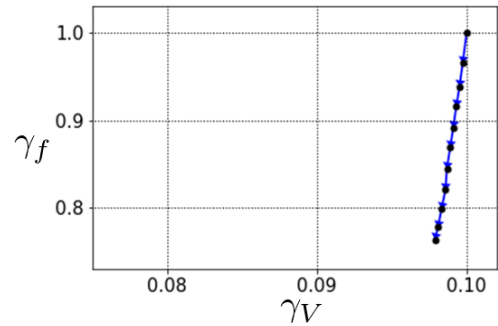


図 5. EM アルゴリズムによる更新結果

γ_V は 0.1 付近にとどまっている一方、 γ_f が 1 から段々と小さくなっていることがわかる。

参考文献

- [1] S. Arguillere, E. Trélat, A. Trounev, and L. Younes. Shape deformation analysis from the optimal control viewpoint. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 104 (1), pp. 139–178, 2015.
- [2] B. Charlier, N. Charon, and A. Trounev. The fshape framework for the variability analysis of functional shapes. *Foundations of Computational Mathematics*, 17 (2), pp. 287–357, 2017.
- [3] N. Charon and A. Trounev. The varifold representation of nonoriented shapes for diffeomorphic registration. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6 (4), pp. 2547–2580, 2013.
- [4] F.-X. Le Dimet and O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 38 (2), pp. 97–110, 1986.
- [5] 小畑秀文. 新学術領域「計算解剖学」の目指すところ. *Medical Imaging Technology*, 29 (3), pp. 99–103, 2011.
- [6] H. R. Roth, A. Farag, E. B. Turkbey, L. Lu, J. Liu, and R. M. Summers. Data from Pancreas-CT. The Cancer Imaging Archive, 2016.