修士論文 要旨

安定分布を定義する振動積分に有効な各種求積法の検討

数理情報学専攻 48-176209 澤田 将宏

指導教員 田中健一郎 准教授

1 はじめに

安定分布と呼ばれている確率分布のクラスは理論的に優れた性質を有しており，物理，経済など様々な分野で利用されている．X_1 と X_2 を確率変数 X の互いに独立な複製とするとき，$a_1X_1 + a_2X_2 \sim aX + b$ (a_1, a_2, a, b は定数）が成り立つことを X は安定であるといい，この性質を持つ分布の総称を安定分布という．

安定分布の密度関数 f は，

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t;\alpha,\beta)\exp\{-itx\}\mathrm{d}t \quad (1)$$

と表すことができる．ここで φ_X は安定分布の特性関数とする．Zolotarev[4] によるパラメータ表示を用いると，特性関数 $\varphi_X(t;\alpha,\beta)$ は

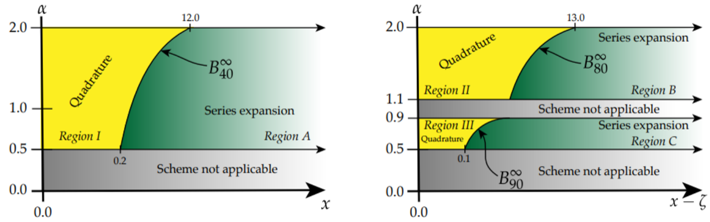
$$\begin{aligned} E[e^{itX}] &= \varphi_X(t;\alpha,\beta) \\ &= \exp\{-|t|^\alpha + itw(t,\alpha,\beta)\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$w(t,\alpha,\beta) = \begin{cases} (|t|^{\alpha-1} - 1)\beta tan\frac{\pi\alpha}{2} & (\alpha \neq 1) \\ -\frac{2\beta}{\pi}\log|t| & (\alpha = 1) \end{cases} \quad (3)$$

と閉じた式で表すことができる．しかし，積分 (1) は一般的には閉じた式で表せず，密度関数 f を得るには数値計算が必要となるが，この積分は高振動な積分や減衰が遅い振動積分になる場合があり，数値積分が困難である．このことが原因で密度関数を算出できない (x,α,β) の範囲が存在し，実用上問題となっている．

2 既存研究

Ament と O'Neil[1] は $f(x,\alpha,\beta)$ を $\beta = 0$ か否かと x, α に応じて漸近展開と一般化ガウス求積公式 [2] を使い分けて密度関数を求める方法を提案した．しかし，これらの手法は減衰が遅い振動積分や高振動積分に有効ではなく，そのような積分計算が必要となるパラメータの範囲では密度計算を断念していた．具体的には既存手法 [1] の適用範囲は図 1 のようになっており，減衰が遅い振動積分となる $\alpha < 0.5$ と高振動積分になる $\beta \neq 0$ かつ $\alpha \approx 1$ での密度関数の算出を断念しており課題となっていた．



(a) The symmetric case, $\beta = 0$.　(b) The asymmetric case, $\beta \neq 0$.

図 1. 既存手法 [1] の適用範囲

引用：[1], P11, Fig.3

3 提案手法

このような振動積分に対して有効な手法としてフーリエ変換に対する DE 公式が Ooura[3] で提案された．

本研究では Ament と O'Neil[1] で計算を断念していた範囲のうち，高振動積分になる $\beta \neq 0$ かつ $\alpha \approx 1$ での計算にフーリエ変換に対する DE 公式を適用し，高精度な計算が可能であることを示した．

提案手法の概要について述べる．フーリエ変換に対する DE 公式の適用対象は減衰が遅い関数 φ が被積分関数に含まれる

$$f(x) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau)e^{ix\tau}\mathrm{d}\tau (x > 0) \quad (4)$$

である．まず，フーリエ変換に対する DE 公式では次の変数変換 $\tau = M\psi(t)$,

$$\psi(t) = \frac{t}{1 - \exp\{-2t - a(1 - e^{-t}) - b(e^t - 1)\}} \quad (5)$$

を考える．ここで M, a, b は正の定数とする．次に $\hat{f}(x) = f(x) - g(x)$ を考える．$g(x)$ は

$$\begin{aligned} g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} &\varphi(M\psi(t))\exp\left\{ixM\psi(t) - ix_0M\hat{\psi}(t)\right\} \\ &\times M\psi'(t)\mathrm{d}t(\hat{\psi}(t) = \psi(t) - t) \end{aligned} \quad (6)$$

で定義されており，x_0 は定数とする．$g(x)$ は d' を $f(x)$ に依存する正の定数とするとき

$$|g(x)| = \mathrm{O}(\exp\{-d'M\min\{x, x_0\}\}) \quad (7)$$

を満たす．よって M が十分大きく $g(x)$ が小さな値になる場合は $\hat{f}(x)$ と f が非常に近い値となる．

また，$\hat{f}(x)$ は，

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(M\psi(t)) \exp\left\{ ixM\psi(t) - \frac{i}{2}x_0 M\hat{\psi}(t) \right\} \cdot 2iM\sin\left(\frac{1}{2}x_0 M\hat{\psi}(t)\right)\psi'(t)\mathrm{d}t \quad (8)$$

と整理でき，この被積分関数は $t \to \pm\infty$ で急減衰している．よって，$|g(x)|$ が小さい場合，急減衰する被積分関数の積分 $\hat{f}(x)$ を計算して f の近似値が得られる．フーリエ変換に対する DE 公式では $\hat{f}(x)$ を台形則で求積した値として $f(x)$ を求めている．

フーリエ変換に対する DE 公式は $(x > 0)$ の場合を適用対象にしていたが，安定分布の密度計算では $(x \leq 0)$ の場合の計算も存在する．しかし，安定分布の特性関数の性質から常に $(x \geq 0)$ の計算に帰着でき，$x = 0$ を除いて条件 $(x > 0)$ を満たしている．フーリエ変換に対する DE 公式では振動項が 1 次式の場合を適用対象としていたが，安定分布の密度計算ではその条件を満たしていない．しかし，$\alpha \approx 1$ の場合は振動項が 1 次式に近い形となっており，フーリエ変換に対する DE 公式が機能すると期待できる．以上の考察から $\alpha \approx 1$ ではフーリエ変換に対する DE 公式が有効であると考えた．

4 数値実験

フーリエ変換に対する DE 公式を用いて $\alpha \approx 1$ の場合における $x \in [-10, 300]$ の安定分布の密度を求めた数値実験を紹介する．$\zeta = -\beta\tan(\pi\alpha/2)$ とおく．図 2 は $x_0 = 300 - \zeta/2(\zeta = 33.5)$ として 600 点公式で密度を計算した結果である．フーリエ変換に対する DE 公式は $x \in (0, 2x_0]$ で有効な求積法であるが，$x \approx 0, x \approx 2x_0$ では精度が悪化する特徴がある．図 2 の結果はその特徴が表れた結果となっている．本研究では $x \approx 0, x \approx 2x_0$ で精度が悪化することに対処するために，x に応じて x_0 を変動させて計算する場合を考えた．また，(7) より，安定分布の密度計算では $x - \zeta \approx 0$ では $|g(x)|$ が大きくなり $\hat{f}$ と f の差が大きくなってしまうので，本研究ではその差を小さくするために $x - \zeta \approx 0$ では刻み幅 h を 1/100 倍する場合を考えた．以上の x_0, h の改良をした場合の結果が図 3 である．しかし，$x - \zeta = 0$ のときはフーリエ変換に対する DE 公式を適用できないので，その場合のみ MATLAB の可変精度型数値積分 vpaintegral を用いた．図 3 では計算した全範囲の x について高精度な結果が得られた．

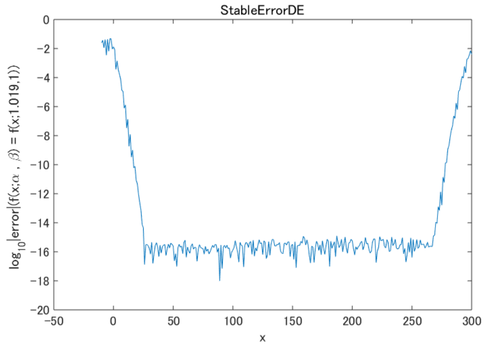


図 2. x_0, h を固定した場合

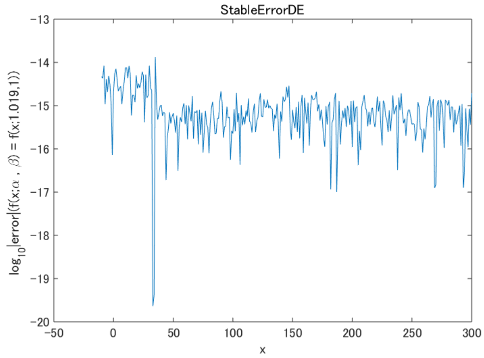


図 3. x_0, h を改良した場合

5 結論

本研究では Ament と O'Neil[1] で計算を断念していた範囲のうち，高振動積分になる $\beta \neq 0$ かつ $\alpha \approx 1$ での計算にフーリエ変換に対する DE 公式を適用し，高精度な計算が可能であることを示した．

フーリエ変換に対する DE 公式を利用した場合，$\alpha \approx 1$ の場合の安定分布の密度を広範囲の x について高精度な計算が可能になったが，$x - \zeta = 0$ のときはフーリエ変換に対する DE 公式を適用できず，課題となった．

参考文献

[1] S. Ament, and M. O'Neil: Accurate and efficient numerical calculation of stable densities via optimized quadrature and asymptotics. *Statistics and Computing*, 28(2016), pp. 171–185.

[2] J. Bremer, Z. Gimbutas, and V. Rokhlin: A nonlinear optimization procedure for generalized Gaussian quadratures. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(2010), pp. 1761–1788.

[3] T. Ooura: A double exponential formula for the Fourier transforms. *Publications of the RIMS*, 41(2005), pp. 971–977.

[4] V. M. Zolotarev. *One-dimensional stable distributions*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.