

# 雑音誘起遷移現象における雑音強度の影響に関する 数理工学的研究

数理情報学専攻 48-176227 森尻 祐史  
指導教員 合原 一幸 教授

## 1 はじめに

様々な分野で状態が突発的に大きく遷移する現象が知られており、そのような遷移現象の危険度を事前に計測するような研究が行われ、早期警戒信号と呼ばれている。その分野では主に分岐現象に関連する遷移現象について取り扱っており、早期警戒信号の最も主流な方法は、分岐点付近で安定固定点の安定性が大きく減少するクリティカルスローイングダウンを利用する方法である [1]。具体的には、時系列データの分散や自己相関が分岐点に近づくにつれて上昇することが利用されている。ところで、遷移現象を考える上ではシステムに雑音が入っていることを考慮するが、その場合パラメータが分岐点に到達する前に雑音に誘起されて状態が遷移することが起こり得る。このような現象を雑音誘起遷移現象と呼ぶ。雑音誘起遷移現象において雑音強度が大きい場合、分岐点から離れたパラメータで遷移が起こるため、伝統的な早期警戒信号は上手く働かない。また、複数の安定領域を持つようなシステムの場合、雑音強度が大きい場合に対しては複数の安定領域を何度も遷移することが起こり得るため、遷移点をどのように定義すべきかという問題も存在する。

## 2 既存研究

雑音強度が大きい場合についても取り扱うために、Shi らは雑音強度の大きさによって遷移現象の性質が大きく 3 つに分けられることを示し、この分類に加えて 1 つの軌道の振る舞いと複数の軌道の振る舞いを分けて考え、計 6 つに状況を分類することを提案した [2]。具体的には、パラメータ  $\lambda$  の変化する時間スケールである  $\tau_\lambda$ 、安定領域にある状態が安定領域を脱出する時間スケールである  $\tau_{\text{tran}}$ 、システムの状態変数の確率分布が定常状態に至る時間スケールである  $\tau_{\text{ergo}}$  を導入し、その順序関係によって遷移現象の性質が変わることを示した。すなわち、 $\tau_\lambda \ll \tau_{\text{tran}} < \tau_{\text{ergo}}$  となる場合、ほとんど分岐点に近いパラメータで遷移が起こり、 $\tau_{\text{tran}} < \tau_\lambda < \tau_{\text{ergo}}$  となる場合、分岐点から離れたパラメータで遷移が起こり、 $\tau_{\text{tran}} < \tau_{\text{ergo}} \ll \tau_\lambda$  となる場合、

何度も遷移が起こる。これらを順に、以下ケース (1)、ケース (2)、ケース (3) と呼ぶ。パラメータの変化速度が単位時間になるように変数変換を施すと、 $\tau_\lambda$  は  $O(1)$  となり、 $\tau_{\text{tran}}, \tau_{\text{ergo}}$  は安定固定点と不安定固定点のポテンシャルエネルギーの差（以下ポテンシャル壁と呼ぶ）に対する雑音強度の大きさによって決まるため、モデルが定まっているとき雑音強度の大きさが遷移現象の性質を決定づけることが分かる。また、Shi らは 6 つの分類それぞれに対して個別に遷移点を定義した。具体的には、ケース (1) については分岐点そのもの、ケース (2) については、1 つの軌道についてはその軌道において遷移する時刻、複数の軌道に対しては最も多くの軌道が遷移する時刻、ケース (3) については定常確率密度関数が最大となる位置が遷移する時刻をそれぞれ遷移点と定義している。

## 3 本研究における遷移点の定義

Shi らは分類それぞれに対して異なる遷移点の定義を与えているが、一方で、本研究では彼らの分類に対して共通した遷移点を定義する。このように定義することにより、Shi らの分類の境界となるような雑音強度領域に対する遷移点の取り扱いが易しくなり、また、全ての場合に対して公平に扱えるようになる。具体的には、遷移点を状態変数の確率密度関数が最大となる位置が遷移する時刻を遷移点と定義する。この遷移点が雑音強度に対してどのように変化するかを具体例を用いて示す。

$$dx = 100(-\lambda(t) + 3x - x^3)dt + \sqrt{2\sigma}dW, \quad (1)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = 1, \lambda(0) = -3 \quad (2)$$

について考える。ここで、Shi らによって導入されている Noise-to-signal ratio (NSR) という量をここでも導入する。NSR はポテンシャル壁に対する雑音強度の大きさを示す量であり、 $\text{NSR} = \log_{10}(\sigma/\mu)$  である。ただし、 $\mu$  はポテンシャル壁の大きさを特徴づける量であり、この場合はポテンシャル壁はほとんどの  $\lambda$  に対して  $O(100)$  であるため 100 とする。NSR に対して遷移点は図 1 のように変化する。NSR < -2 となる領域と NSR > 0 となる領域はそれぞれケース (1)、ケース (3)

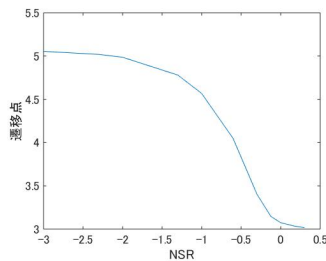


図 1. NSR に対する  
遷移点の変化

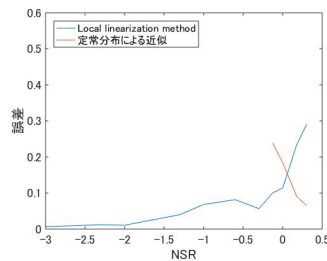


図 2. NSR に対する  
推定法の誤差

となる雑音強度領域である。前者は遷移点が  $t = 5$ 、後者は  $t = 3$  と非常に近い値になっているが、これらはそれぞれ、分岐点に対応する時刻、定常確率密度関数の最大となる位置が遷移する時刻に対応しており、Shi らの定義とよく一致している。

#### 4 遷移点の推定

前述の遷移点に対して、遷移点より前の時刻までの時系列データから遷移点を推定する問題を考える。この問題に対して雑音強度が大きい場合をを目的とした方法と雑音強度が小さい場合を目的とした方法の 2 種類を提案し、様々な雑音強度に対する精度を調べる。前者は各時刻の状態が持つ確率分布が定常に近いことを期待して定常確率密度関数でデータの尤度を近似し、それを最大化する方法である。後者は、Shoji らによって提案された Local linearization method という各時刻で確率微分方程式を線形近似することでデータの尤度を近似し、それを最大化する方法である [3]。雑音強度が大きい場合は遷移点の前にも状態変数としては他の安定領域に遷移しうるので、複数の安定領域の情報を時系列データがもち、遷移点を推定することは原理的に可能だが、遷移が 1 度しか起こらないような場合は何らかのモデルの情報が与えられていなければ遷移点を推定することは不可能である。したがって、後者の方法はモデルの情報が与えられていることを仮定している。数値実験の結果を図 2 に示す。赤線が前者の方法、青線が後者の方法を表している。結果としては、前者の方法が上手く行くのは主にケース (3) の場合であり、ケース (2) とケース (3) の境界となる雑音強度領域に対しても精度は悪いものの推定自体はできている。一方で後者の方法は雑音強度が大きくなるにつれて精度が悪化している。

#### 5 まとめ

ケース (1) については遷移点の推定をするわけではないものの、遷移の危険度を調べる意味では従来の早期警戒信号が対応できる領域である。また、ケース (3) については経験分布の KL ダイバージェンスの変化が危険度を表す指標としてよく働くことが示されていた。[2]。本研究では全ての雑音強度領域に対して遷移点を統一的に定義し、その遷移点を推定する問題を考えた。遷移点を推定するという問題は従来の早期警戒信号の分野では考えられていなかった。この問題は危険度を表す指標を見つける問題より難しい問題なので、遷移点の推定が上手く行くなれば危険度を表す指標も存在しうると考えられる。特定のモデルに対して実験した結果としては、雑音強度が大きい場合はモデルの情報を与えられていなくとも遷移点の推定ができるがケース (2)、ケース (1) に対してはできなかった。ケース (2) とケース (3) の境界、すなわち何度か遷移が起こるものの確率密度関数は定常からは程遠いような場合については、精度は悪いものの遷移点の推定はできていた。したがって、この領域に対してはより精度の良い方法、あるいは危険度を表す指標に問題を落とした場合の方法などが今後の課題となる。一方、モデルの情報が与えられていれば、ケース (1) からケース (2) についても推定が可能だった。ケース (1) については前述のように伝統的な早期警戒信号が良く働く領域なので、ケース (2) に対してより少ないモデルの情報から危険度を測る方法も今後の課題と言える。また、多次元の場合など、より一般的な場合への適用も重要な課題である。

#### 参考文献

- [1] Marten Scheffer, Jordi Bascompte, William A. Brock, Victor Brovkin, Stephen R. Carpenter, Vasilis Dakos, Hermann Held, Egbert H. van Nes, Max Rietkerk and George Sugihara. Early-warning signals for critical transitions. *Nature*, Vol 461, Issue 3 (2009).
- [2] Jifan Shi, Tiejun Li and Luonan Chen. Towards a critical transition theory under different temporal scales and noise strengths. *Physical Review E*, Vol. 93, 032137(2016).
- [3] Isao Shoji and Tohru Ozaki. Estimation for nonlinear stochastic differential equations by a local linearization method. *Stochastic Analysis and Applications*, Vol. 16, Issue 4(1998), pp. 733-752.