多重マトロイド制約最適化問題の近似アルゴリズムと整数性ギャップ

数理情報学専攻 48176207 腰高 拓美
指導教員 岩田 覚 教授

1 はじめに

マトロイドは組合せ最適化における基本的な構造であり, 多くの組合せ最適化問題がマトロイド制約上の最適化問題として記述することができる. 線形関数最適化問題の制約条件として与えられるマトロイドが一つあるいは二つの場合については多項式時間アルゴリズムが知られている. 一方で制約条件として与えられるマトロイドが三つ以上の場合, 最適解の計算が NP 困難である.

k 個のマトロイドを制約条件とする k-マトロイド交叉問題に対し, 重みなしの場合 Lee–Sviridenko–Vondrák [3] が $\frac{k}{2}+\epsilon$-近似, 重みつきの場合 Lee–Sviridenko–Vondrák [2] が $k-1+\epsilon$-近似のアルゴリズムを与えた. これらのアルゴリズムは近傍探索を用いている. 一方で線形計画緩和を用いた近似アルゴリズムも存在し, 重みなしの場合 Lau–Ravi–Singh [1] が $k-1$-近似, 重みつきの場合 Linhares–Olver–Swamy–Zenklusen [4] が $k=3$ に対し 2-近似のアルゴリズムを与えた.

k-マトロイド交叉問題の一般化として定義できる k-マッチオイド問題に対しても, Lee–Sviridenko–Vondrák [3] が重みなしの場合 $\frac{k}{2}+\epsilon$-近似, 重みつきの場合 $k=2$ に対し $\frac{3}{2}$-近似のアルゴリズムを与えた. ここで前者は近傍探索, 後者は線形計画緩和を用いたアルゴリズムである.

本研究では線形計画緩和を用いたアルゴリズムに注目し, 重みなしの k-マッチオイド問題に対する $k-1+\frac{1}{k}$-近似アルゴリズムを示した. さらに入力のマトロイドがラミナーマトロイドの場合には, 重みつきの問題が持つ整数性ギャップを示した.

2 問題設定

k-マトロイド交叉問題は次のように定義される.

定義 1 (k-マトロイド交叉問題)**.** 入力として共通の台集合を持つ k 個のマトロイド $\mathcal{M}_i=(U,\mathcal{I}_i)(i=1,...,k)$ と, 各要素の重み関数 $w:U\to\mathbb{R}_{>0}$ が与えられる. このとき U の部分集合 S で, 任意の i について $S\in\mathcal{I}_i$ を満たすものの中で, $\sum_{u\in S}w(u)$ が最大となる S を求める.

k-マッチオイド問題は次のように定義される.

定義 2 (k-マッチオイド問題)**.** 入力として $m(\geq k)$ 個のマトロイド $\mathcal{M}_i=(U_i,\mathcal{I}_i)(i=1,...,m)$ と, 集合 $U=U_1\cup\cdots\cup U_m$ の各要素の重み関数 $w:U\to\mathbb{R}_{>0}$ が与えられる. ただし任意の要素 $u\in U$ に対し, $\#\{i\in\{1,...,m\}\mid v\in U_i\}\leq k$ が成り立つとする. このとき U の部分集合 S で, 任意の i について $S\cap U_i\in\mathcal{I}_i$ を満たすものの中で, $\sum_{u\in S}w(u)$ が最大となる S を求める.

k-マトロイド交叉問題の線形計画緩和として次の線形計画問題を考える:

$$\begin{aligned}\text{maximize}\ & \sum_{u\in U}w(u)\cdot x(u)\\ \text{subject to}\ & \sum_{u\in S}x(u)\leq r_{\mathcal{M}_i}(S),\ \forall i\in\{1,...,k\},\ \forall S\subseteq U,\\ & x(u)\geq 0,\quad \forall u\in U.\end{aligned}$$

同様に k-マッチオイド問題の線形計画緩和として次の線形計画問題を考える:

$$\begin{aligned}\text{maximize}\ & \sum_{u\in U}w(u)\cdot x(u)\\ \text{subject to}\ & \sum_{u\in S}x(u)\leq r_{\mathcal{M}_i}(S),\ \forall i\in\{1,...,m\},\ \forall S\subseteq U_i,\\ & x(u)\geq 0,\ \forall u\in U.\end{aligned}$$

ただし, $r_{\mathcal{M}_i}$ は各マトロイド $\mathcal{M}_i$ の階数関数である.

一般に線形計画緩和問題と元問題の間には整数性ギャップと呼ばれる値が定義される.

定義 3 (整数性ギャップ)**.** 最大化問題の最適値を Opt, 線形計画緩和問題の最適値を LP とする. このとき線形計画緩和問題の整数性ギャップ $=\sup\frac{\mathrm{LP}}{\mathrm{Opt}}$ と定義する. ここで sup は対象の最大化問題のすべての入力に対しての上限を表す.

先行研究のうち, 線形計画緩和を用いたアルゴリズムの近似比は全て整数性ギャップと等しくなっている. Lee–Sviridenko–Vondrák [3] は k-マトロイド交叉問題の整数性ギャップは $k-1$, k-マッチオイド問題の整数性ギャップは $k-1+\frac{1}{k}$ であるという予想を与えた.

3 研究成果

本研究では次の補題を示した.

補題 1. k-マッチオイド問題の線形計画緩和問題の端点解 x について, x は全ての成分が 0 のベクトル, またはある要素 $u \in U$ が存在して $x(u) \geq \frac{1}{k}$ のどちらかが成り立つ.

補題 1 の結果を重みなし k-マトロイド交叉問題に対する Lau–Ravi–Singh [1] のアルゴリズムと組合せることで, 次の定理が得られる.

定理 1. 重みなし k-マッチオイド問題の整数性ギャップは $k-1+\frac{1}{k}$ で, 近似比 $k-1+\frac{1}{k}$ の多項式時間近似アルゴリズムが存在する.

本研究では定理 1 の結果は重みつき 2-マッチオイド問題に対する Lee–Sviridenko–Vondrák [3] のアルゴリズムを含む枠組みになっていることも示した.

一方で 2-マッチオイド問題を除く重みつきの問題に対しては, マトロイドのクラスを制限することによって整数性ギャップを示した. まずラミナー集合族とラミナーマトロイドは次のように定義される.

定義 4 (ラミナー集合族)**.** 集合族 $\mathcal{L}$ に対し, 任意の異なる 2 つの集合 $A, B \in \mathcal{L}$ について $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, $A \cap B = \emptyset$ のいずれかが成り立つとき, $\mathcal{L}$ をラミナー集合族と呼ぶ.

定義 5 (ラミナーマトロイド)**.** 有限集合 U について, その部分集合族でかつラミナー集合族である $\mathcal{L}$ と関数 $l{:}\mathcal{L} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し, U の部分集合族 $\mathcal{I}$ を

$$S \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \text{任意の } L \in \mathcal{L} \text{ について } |S \cap L| \leq l(L)$$

で定めると $\mathcal{M} = (U, \mathcal{I})$ はマトロイドになる. このように定義されるマトロイドをラミナーマトロイドと呼ぶ.

このラミナーマトロイド上の問題に対して, 次の定理を示した.

定理 2. 入力のマトロイドがラミナーマトロイドの場合, 重みつき k-マトロイド交叉問題の整数性ギャップは $k-1$ で, 重みつき k-マッチオイド問題の整数性ギャップは $k-1+\frac{1}{k}$ である.

定理 2 の結果は, Parekh–Pritchard [5] が k-ハイパーグラフ b-マッチング問題の整数性ギャップの証明に用いたアルゴリズムおよび手法を拡張したものになっている. k-ハイパーグラフ b-マッチング問題は制約条件をマトロイドとして表すと分割マトロイド上の k-マッチオイド問題と等価であるが, ラミナーマトロイドは分割マトロイドを一般化した構造になっている.

4 今後の課題

今後の課題としては次の二つが挙げられる. 一つ目の課題はラミナーマトロイド上の重みつき k-マトロイド交叉と k-マッチオイド問題に対し, 整数性ギャップと等しい近似比の多項式時間近似アルゴリズムを構成することである. Parekh–Pritchard [5] は k-ハイパーグラフ b-マッチング問題に対し, 整数性ギャップの証明だけではなく等しい近似比の多項式時間近似アルゴリズムを構成している. このことから定理 2 の結果についても多項式時間近似アルゴリズムを構成する余地が存在すると考えられる.

二つ目の課題はラミナーマトロイドに限らない任意のマトロイド上の重みつき k-マトロイド交叉と k-マッチオイド問題に対して整数性ギャップを示すことである. 重みつき 3-マトロイド交叉問題に対する Linhares–Olver–Swamy–Zenklusen [4] のアルゴリズムはマトロイド交叉問題, すなわち $k=2$ の問題において多面体の端点が整数解となる事実に依存している. 一般の k において端点解が満たす性質を用いた証明が可能なのかについてさらなる研究が必要と考えられる.

参考文献

[1] L. C. Lau, R. Ravi, and M. Singh: *Iterative Methods in Combinatorial Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[2] J. Lee, M. Sviridenko and J. Vondrák: Submodular maximization over multiple matroids via generalized exchange properties, *Proceedings of the 12th International Workshop and 13th International Workshop on Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques*, LNCS 5687, Springer-Verlag, 2009, 244–257.

[3] J. Lee, M. Sviridenko and J. Vondrák: Matroid matching: the power of local search, *SIAM Journal on Computing,* 42 (2013), 357–379.

[4] A. Linhares, N. Olver, C. Swamy, and R. Zenklusen: Approximate multi-matroid intersection via iterative refinement, *arXiv*, 2018.

[5] O. Parekh and D. Pritchard: Generalized hypergraph matching via iterated packing and local ratio, *Proceedings of the 12th International Workshop on Approximation and Online Algorithms*, LNCS 8952, Springer-Verlag, 2014, 207–223.