修士論文 要旨

Combinatorial and Algorithmic Approaches to CAT(0) Complexes
(CAT(0) 複体への組合せ的・アルゴリズム的アプローチ)

数理情報学専攻 48176219 林 興養
指導教員 平井 広志 准教授

1 はじめに

CAT(0) 空間とは, どの 2 点もコンパクトな実数区間と等長な弧で結べ, どの三角形もユークリッド空間の対応する三角形よりも「痩せている」ような距離空間である. これはもともと幾何学的群論の文脈で Gromov [7] によって導入された空間であり, “CAT(0)” は曲率が非正であることを意味している. CAT(0) 空間はユークリッド空間や双曲空間を例として含む広いクラスの距離空間であり, ユークリッド空間で成り立つ良い性質を多く引き継いでいる. 特に, 任意の 2 点の間の測地線 (= 最短パス) が一意に決まる. 本研究では, CAT(0) 性をもつユークリッド的多面体的複体, 特に, 立方複体とオーソスキーム複体に焦点をあてる.

2 既存研究

■ 立方複体 様々な次元の立方体 $[0,1]^k$ を互いに等長な面で貼り合わせた多面体的複体を立方複体と呼ぶ. Gromov [7] は立方複体が非正曲率をもつための組合せ的な特徴づけを与えた. そのため, CAT(0) 立方複体は扱いやすい CAT(0) 空間の一つと言え, 計算系統学やロボティクス等, 数学のあらゆる分野で登場する.

定理 2.1 ([7])**.** 立方複体 K が CAT(0) であるのは, それが単連結でかつ各頂点 $v \in K$ のリンクがフラッグ[*1]であるとき, かつそのときに限る.

CAT(0) 空間上で, 与えられた 2 点を結ぶの唯一の測地線を計算する問題 (測地線問題) は基本的かつ重要である. Owen [11], Owen–Provan [12] は系統樹空間における測地線問題が多項式時間で解けることを示した. 系統樹空間とは, 計算系統学の分野で, 2 つの系統樹をうまく比較するために Billera et al. [3] が導入した CAT(0) 立方複体である. Miller et al. [10] はこの結果を CAT(0) 象限空間というより広いクラスの立方複体に対して拡張した. Chepoi–Maftuleac [6] は 2 次元の CAT(0) 立方複体に対して, 効率的な測地線アルゴリズムを与えた. 一般次元の CAT(0) 立方複体に対する測地線アルゴリズムは Ardila et al. [1] によって与えられたが, その実行時間の多項式性は未解決である.

■ オーソスキーム複体 幾何学的群論において, ブレイド群が CAT(0) 群であるかどうかは重要な未解決問題である. n-ブレイド群 $\mathcal{B}_n$ とは, 直観的には, 空間 $\mathbb{R}^3$ において絡み合う n 本の糸がなす群である. この群は様々な分野で現れ, 中でも, 非交叉分割束 NC_n との関係も深い. 集合 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ の分割は, どの 2 つのブロックも「交叉しない」とき, 非交叉であるという. $[n]$ の非交叉な分割全体の集合 NC_n は包含関係に関して束をなす [9]. Brady–McCammond [4] は次を示した.

定理 2.2 ([4])**.** 各正整数 n に対して, 非交叉分割束 NC_n のオーソスキーム複体 $K(NC_n)$ が CAT(0) 空間ならば, n-ブレイド群 $\mathcal{B}_n$ は CAT(0) 群である.

ここで, 階層的な半順序集合 P に対するオーソスキーム複体 $K(P)$ とは, P の順序複体に適切な距離構造を入れて得られる多面体的複体である [4]. すべての n に対して $K(NC_n)$ が CAT(0) であることを主張するのが Brady–McCammond 予想であり, 彼ら自身は $n \leq 5$ の場合を, Haettel et al. [8] は $n = 6$ の場合を示した.

驚くべきことに, CAT(0) オーソスキーム複体は理論計算機科学や組合せ最適化などの分野にも登場する. 一方で, オーソスキーム複体 $K(P)$ が CAT(0) となるための半順序集合 P の特徴づけは多くは知られていない. Brady–McCammond [4] はランクが 4 以下の P に対する特徴づけを与えた. Chalopin et al. [5] はモジュラ束のオーソスキーム複体が CAT(0) であることを示した.

3 主結果

■ ブール束内での CAT(0) 性 オーソスキーム複体の CAT(0) 性の特徴づけに関連して, 次の問は基本的である: ブール束に埋め込まれた束 L のオーソスキーム複体 $K(L)$ が CAT(0) となるための L の必要十分条件は

[*1] 頂点 v のリンクがフラッグであるとは, v の隣接頂点の任意の部分集合 $u_1, u_2, \ldots, u_k$ に対し, v, u_i, u_j $(\forall i, j)$ を含む K の面が存在することと $v, u_1, u_2, \ldots, u_k$ を含む K の面が存在することが同値になることをいう.

何か？ これに対し, 以下の必要条件を与えた.

考察 1. L をブール束 B に埋め込まれた束とする. $K(L)$ が CAT(0) ならば, 任意の $p_1, p_2, \ldots, p_k \in L$ に対して, $p_i \vee_B p_j, p_i \wedge_B p_j \in L$ $(\forall i, j)$ であることと L が部分束 $\langle p_1, p_2, \ldots, p_k \rangle_B$ を含むことは同値である.

この条件は, Gromov の CAT(0) 立方複体の特徴づけ (定理 2.1) を彷彿させる. 束 L のランクが 4 以下のときは, この条件は十分条件にもなる.

■ Brady–McCammond 予想に向けて 複体においては, CAT(0) 性と一意測地性は等価になる. そのため, 束 NC_n のオーソスキーム複体 $K(NC_n)$ の CAT(0) 性を示す際, 複体 $K(NC_n)$ の CAT(0) かつ凸な部分複体は重要な役割を果たす. これに関連して, 次を示した.

考察 2. $K(NC_{n-1})$ が CAT(0) ならば, 任意の余原子 $p \in NC_n$ に対して, NC_n の区間 $[\hat{0}, p]$ と $[\hat{0}, \kappa(p)]$ で生成される部分束によって張られる部分複体 $K(\langle [\hat{0}, p] \cup [\hat{0}, \kappa(p)] \rangle)$ は CAT(0) かつ $K(NC_n)$ において凸である.

ただし, $\kappa(p)$ は元 p の Kreweras [9] によって定義された補元を表す. 系として, 束 NC_n の任意の真の区間 $[p, q]$ に対応する部分複体 $K([p, q])$ が, $K(NC_n)$ において凸な CAT(0) 空間であることを示すことができる.

■ 測地線アルゴリズム 本研究では, 任意の CAT(0) 立方複体の測地線問題に対する初の多項式時間アルゴリズムを与えた. ここで, 入力は以下のようにする. CAT(0) 立方複体に対しては, その組合せ的な特徴づけから, 非整合対付き半順序集合[*2] によるコンパクトな表現法が知られている [1, 2]. 非整合対付き半順序集合 P が与えられたとき, 対応する CAT(0) 立方複体 K_P は $|P|$ 次元の立方体 $[0, 1]^P$ に埋め込まれ, K_P の各面は P の構造によって指定される. この設定のもと, 次を示した.

結果 3. 非整合対付き半順序集合 P, CAT(0) 立方複体上の 2 点 $p, q \in K_P$, 及び, 正数 $\epsilon > 0$ が与えられたとき, $O(|P|^7 \log(1/\epsilon))$ 時間で次を求められる: K_P における点列 $p = x_0, x_1, \ldots, x_m = q$ (ただし $m = O(|P|)$) であって $\sum_{i=1}^{m} d(x_{i-1}, x_i) \leq d(p, q) + \epsilon$ をみたすもの, 及び, 点 x_{i-1} と x_i を結ぶ測地線 $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

ここで, 3 次元以上の CAT(0) 立方複体の測地線は, 代数的な理由から, 一般には簡単な閉じた式として書き表せないことに注意する [1]. したがって, 出力としての測地線は近似的なものになる.

提案アルゴリズムは, 2 点を結ぶ折れ線パスを局所的に変形していくという単純な反復法に基づくものである. その局所最適化には, CAT(0) 象限空間の測地線問題に対する Miller et al. [10] の結果を利用する. 提案手法の収束性と多項式性は, 本質的には, CAT(0) 空間の距離関数の凸性によるものである. そのため, アルゴリズム自体は, CAT(0) 立方複体に限らず, 局所的に測地線が計算できるすべての CAT(0) 空間に適用可能であり, CAT(0) 性をもつ他の複体上の測地線問題等, さらなる応用が期待される. また, 一般の複体上の測地線問題は NP 困難であるため, この成果は, 曲率と計算複雑度の間の興味深い関係を示唆するものであると言える.

*2 半順序集合 P における非整合関係とは, 次をみたす二項関係 $\smile$ のことをいう: (1) $a \smile b$ ならば a と b は比較不可能である; (2) $a \smile b, a \preceq a', b \preceq b'$ ならば $a' \smile b'$ である.

参考文献

[1] F. Ardila, M. Owen and S. Sullivant: Geodesics in CAT(0) cubical complexes. *Adv. in Appl. Math.*, 48, 2012, pp. 142–163.

[2] J. P. Barthéremy and J. Constantin: Median graphs, parallelism and posets. *Discrete Math.*, 111, 1993, pp. 49–63.

[3] L. J. Billera, S. P. Holmes and K. Vogtmann: Geometry of the space of phylogenetic trees. *Adv. in Appl. Math.*, 27, 2001, pp. 733–767.

[4] T. Brady and J. McCammond: Braids, posets and orthoschemes. *Algebr. Geom. Topol.*, 10, 2010, pp. 2277–2314.

[5] J. Chalopin, V. Chepoi, H. Hirai and D. Osajda: Weakly modular graphs and nonpositive curvature. *Memoirs of the AMS*, to appear.

[6] V. Chepoi and D. Maftuleac: Shortest path problem in rectangular complexes of global nonpositive curvature. *Comput. Geom.*, 46, 2013, pp. 51–64.

[7] M. Gromov: Hyperbolic groups. In: *Essays in Group Theory*, vol. 8, Math. Sci. Res. Inst. Publ., Springer, New York, 1987, pp. 75–263.

[8] T. Haettel, D. Kielak and P. Schwer: The 6-strand braid group is CAT(0). *Geom. Dedicata*, 182, 2016, pp. 263–286.

[9] G. Kreweras: Sur les partitions non croisées d'un cycle. *Discrete Math.*, 1, 1972, pp. 333–350.

[10] E. Miller, M. Owen and J. S. Provan: Polyhedral computational geometry for averaging metric phylogenetic trees. *Adv. in Appl. Math.*, 68, 2015, pp. 51–91.

[11] M. Owen: Computing geodesic distances in tree space. *SIAM J. Discrete Math.*, 25, 2011, pp. 1506–1529.

[12] M. Owen and J. S. Provan: A fast algorithm for computing geodesic distances in tree space. *IEEE/ACM Trans. Comput. Biology Bioinform.*, 8, 2011, pp. 2–13.