

# 季節調整モデルにおける多重周期季節成分の推定

数理情報学専攻 48176217 羽場 智哉

指導教員 長尾 大道 准教授

## 1 はじめに

Kitagawa and Gersch [2] で提案された DECOMP では観測時系列  $y_t$  を

$$y_t = u_t + s_t + w_t \quad (1)$$

として、トレンド成分  $u_t$ 、季節成分  $s_t$ 、観測ノイズ  $w_t$  に分解する場合、 $u_t$  および  $s_t$  が従うシステムモデルをそれぞれ

$$(1 - B)^k u_t = v_{u,t}, \quad (2)$$

$$(1 + B + \dots + B^{p-1})s_t = v_{s,t} \quad (3)$$

とする。ここで  $B$  は、任意の時系列  $z_t$  に対して  $z_{t-1}$  を返す時間遅延オペレーター、 $k$  はトレンド成分の次数、 $p$  は季節成分の周期であり、 $v_{u,t}$  および  $v_{s,t}$  はそれぞれ、トレンド成分および季節成分に関するシステムノイズである。DECOMP のシステムモデルは、特定の関数形の仮定を必要とせず、各成分の柔軟な表現を可能にする。式 (1) のように、季節成分が 1 つの場合は、システムモデルとして式 (2)、(3) を採用することにより、トレンド成分と季節成分を一意に分解することができる。しかし、現実の時系列データには複数の周期変動が混在していることが極めて多く、これらを分離・抽出するためには、DECOMP を季節成分が複数存在する場合に拡張することが必要となる。

本研究では、季節調整モデルに基づく多重周期季節成分の抽出手法を提案する。多重周期季節調整は季節成分を 2 つ含む場合が理論的な基礎となるが、時系列に周期  $p_1$ 、 $p_2$  の 2 つの周期変動が含まれている場合、 $p_1$ 、 $p_2$  の最大公約数に基づいて 3 つのタイプに分けられ、それぞれについて、異なる手法を用いる必要があることを示す。また提案手法は、3 つ以上の季節成分をもつ多重周期季節調整モデルの場合についても、2 つの場合の手法を自然に拡張することによって一意分解が可能であることを示す。

## 2 二重周期季節調整モデルの一意分解

2 つの異なる周期をもつ季節調整モデルを考える。ここでは、これを二重周期季節調整モデルと呼ぶことにする。二重周期季節調整モデルでは時系列  $y_t$  を

$$y_t = u_t + s_t^1 + s_t^2 + w_t \quad (4)$$

として、トレンド成分  $u_t$ 、周期  $p_1$  の季節成分  $s_t^1$ 、周期  $p_2$  の季節成分  $s_t^2$ 、観測ノイズ  $w_t$  に分解する。

ここで、二重周期季節調整モデルの一意分解性について考察する。二重周期季節調整モデルは、周期  $p_1$ 、 $p_2$  の最大公約数によって、 $p_1$ 、 $p_2$  の最大公約数が 1 である「タイプ 1」、 $p_1$ 、 $p_2$  の最大公約数が  $p_1$  である「タイプ 2」、 $p_1$ 、 $p_2$  の最大公約数が 2 以上  $p_1$  未満である「タイプ 3」という、3 つのタイプに分類される。結論から述べると、DECOMP を自然に二重周期季節調整モデルに拡張した場合、タイプ 1 については 2 つの季節成分の一意分解が可能であるが、タイプ 2、タイプ 3 については 2 つの季節成分の一意分解は可能ではない。

## 3 提案手法

3 つすべてのタイプの場合について、季節成分を一意分解するための手法を提案する。タイプ 1 の場合、季節成分が 1 つの場合の季節調整モデルを自然に拡張して

$$y_t = u_t + s_t^1 + s_t^2 + w_t, \quad (5)$$

$$(1 - B)^k u_t = v_{u,t}, \quad (6)$$

$$(1 + B + \dots + B^{p_1-1})s_t^1 = v_{s^1,t}, \quad (7)$$

$$(1 + B + \dots + B^{p_2-1})s_t^2 = v_{s^2,t} \quad (8)$$

を考える。ここで  $v_{s^1,t}$ 、 $v_{s^2,t}$  は、平均 0、それぞれの分散が  $\sigma_{s^1}^2$ 、 $\sigma_{s^2}^2$  の正規分布に従うシステムノイズである。タイプ 1 の場合、式 (5)–(8) の状態空間モデルを用いることで、2 つの季節成分が一意分解可能である。

タイプ 2 の場合、 $s_t^2$  のシステムモデルである式 (8) を

$$(1 + B^{p_1} + \dots + B^{p_2-p_1})s_t^2 = v_{s^2,t} \quad (9)$$

に変更する。これにより、2 つの季節成分が一意分解可能となる。

タイプ 3 では  $s_t^1$ 、 $s_t^2$  のシステムモデルを変更した上で、さらにこの共通因子をオペレーターにもつ新しい季節成分  $s_t^3$  を導入することにより、一意分解が可能となる。タイプ 3 では、提案モデルは

$$y_t = u_t + s_t^1 + s_t^2 + s_t^3 + w_t, \quad (10)$$

$$(1 - B)^k u_t = v_{u,t}, \quad (11)$$

$$(1 + B^{p_1} + \dots + B^{p_1-p_1})s_t^1 = v_{s^1,t}, \quad (12)$$

$$(1 + B^{p_1} + \dots + B^{p_2-p_1})s_t^2 = v_{s^2,t}, \quad (13)$$

$$(1 + B + \dots + B^{p-1})s_t^3 = v_{s^3,t} \quad (14)$$

で与えられる．ここで  $v_{s^3,t}$  は平均 0，分散  $\sigma_{s^3}^2$  の正規分布に従うシステムノイズである．提案モデルによって，2つの季節成分が一意分解可能となる．

#### 4 数値実験

擬似データを用いて，提案手法の有効性について検証する．ここで DECOMP を，自然に多重周期季節調整モデルに適用した分解手法を以下，K&G 法と呼ぶことにする．取り扱う擬似データは

$$y_t = u_t + s_t^1 + s_t^2 + w_t \quad (15)$$

である．ここで，各成分は図 1 の黒線で表される．季節成分の周期は 12 と 18 であり，これはタイプ 3 に相当する．このデータに対し，提案手法および K&G 法を適用して得られた成分分解の結果を図 1 に示す．図 1 によると，K&G 法に従い，一意分解可能でない状態空間モデルを採用した場合，必ずしも元の時系列を再現できないことがわかる．一方，提案手法における一意分解では，各成分を正しく分離・抽出できることが確認できる．また第 3 季節成分の導入は，一意な分解に貢献のために必須でありながらも，観測時系列の分解結果に大きな影響は与えないことがわかる．

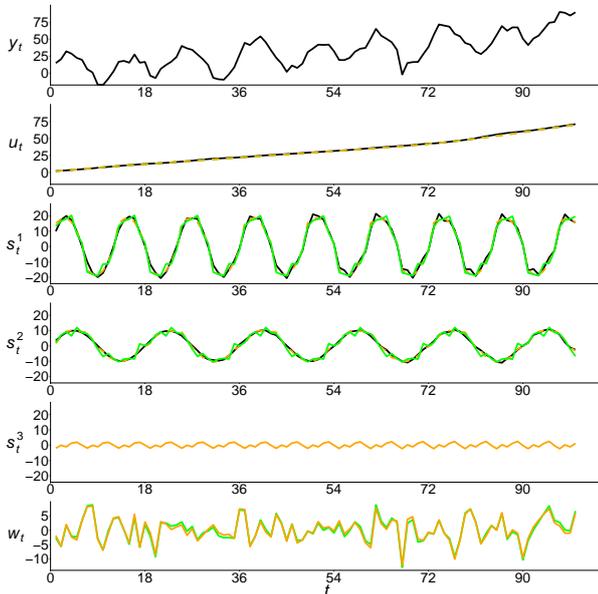


図 1: 季節成分が正弦波の場合について，タイプ 3 を適用した数値実験の結果．上から，時刻  $t = 100$  までの観測時系列  $y_t$ ，トレンド成分  $u_t$ ，周期  $p_1 = 12$  の季節成分  $s_t^1$ ，周期  $p_2 = 18$  の季節成分  $s_t^2$ ，新たに導入した周期 6 の季節成分  $s_t^3$ ，観測ノイズ  $w_t$ ．黒線は観測，橙線は提案手法における分解結果，緑線は K&G 法における分解結果を表す．

#### 5 実データへの適用

1962 年 1 月から 2018 年 9 月までの 1 月ごとの北極点における地球自転軸の極運動データ [1] を，トレンド成分  $u_t$ ，公転に伴う 12 か月周期の季節成分  $s_t^1$ ，チャンドラーウォブルに伴う 14 か月周期の季節成分  $s_t^2$ ，タイプ 3 に相当するため追加する 2 か月周期の季節成分  $s_t^3$ ，観測ノイズ  $w_t$  に分解した結果を図 2 に示す．図 2 によると，トレンド成分が緩やかに上昇している．また公転の周期を表す季節成分  $s_t^1$  と比べて，チャンドラーウォブルに伴う周期を表す季節成分  $s_t^2$  はその変動が大きい．特に，直近 20 年間はチャンドラーウォブルに伴う周期変動が急速に小さくなっており，これは 2005 年にチャンドラーウォブルが観測史上最小を記録したという観測事実を反映している可能性がある．

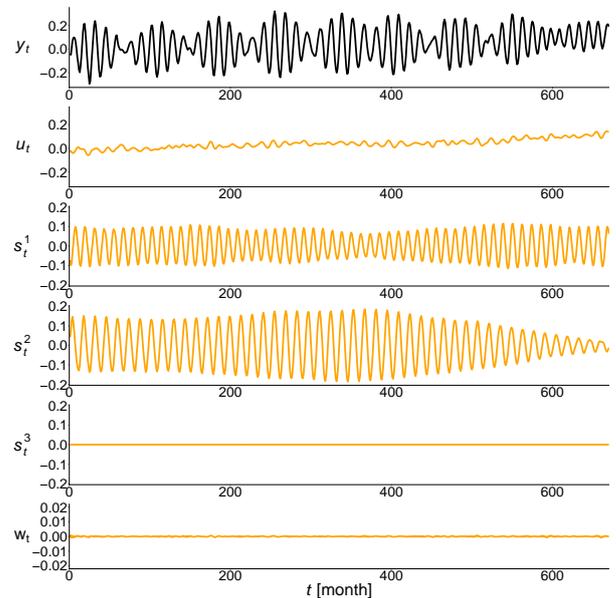


図 2: 1962 年 1 月 1 日から 2018 年 10 月 5 日までの 1 月ごとの北極点における極運動データの  $x$  成分の分解．上から原系列  $y_t$ ，トレンド成分  $u_t$ ，12 か月周期の季節成分  $s_t^1$ ，14 か月周期の季節成分  $s_t^2$ ，2 か月周期の季節成分  $s_t^3$ ，観測ノイズ  $w_t$ ．黒線は観測，橙線は推定結果を表す．

#### 参考文献

[1] IERS Earth Orientation Centre. EOP 14 C04 series for 1962–2018. <https://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/EarthOrientationData/eop.html> (参照日 2019 年 1 月 22 日)．  
 [2] G. Kitagawa and W. Gersch. A smoothness priors-state space modeling of time series with trend and seasonality. *Journal of the American Statistical Association*, 79 (386):pp. 378–389, 1984.