修士論文 要旨

多重集合を戦略としてもつコンジェスチョンゲーム

数理情報学専攻 48-176210　城山 健吾

指導教員　平井 広志 准教授

1　はじめに

利害が必ずしも一致しない状況において複数の人間の行動の最適戦略を分析する数学の理論をゲーム理論という．コンジェスチョンゲーム (Rosenthal [11]) とは, 使う人数が多くなるほどコストが大きくなる限られた資源を複数のプレイヤーがどう分け合えばよいかを考えるゲームのモデルであり, 応用例としては, 渋滞の解消やプロセッサースケジューリングなどがある．コンジェスチョンゲームは,

$$\Gamma = (N, A, (\mathcal{X}_i)_{i \in N}, (c_a)_{a \in A}) \tag{1}$$

の組で表される．N はプレイヤーの集合 ($|N| = n$), A は有限な資源の集合 ($|A| = m$), $\mathcal{X}_i$ は A の部分集合の集合族である ($\mathcal{X}_i \subseteq 2^A$)．全てのプレイヤーはそれぞれ戦略として, A の要素のうちいくつかを使用する．プレイヤー i は自分の戦略として $\mathcal{X}_i$ の要素のうち 1 つをとれる．つまり, $\mathcal{X}_i$ はプレイヤー i がとれる戦略の集合である．c_a は資源 a を使う人 1 人当たりのコストを表す．c_a は a を使う人数に対する関数であり ($c_a : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$), 単調非減少である．これは, 1 つの資源を使う人数が多いほど 1 人当たりのコストは大きくなることを表している．$c_a(0) = 0$ とする．

このときプレイヤー i のコストは

$$\pi_i(X) = \sum_{a \in X_i} c_a(\sigma_a(X))$$

と表せる．ここで, $X = (X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$ はプレイヤーが実際にとる戦略の組である．$\sigma_a(X)$ は戦略の組 X のもとで資源 a を使う人数を表す．それぞれのプレイヤーは自身のコストをなるべく小さくしようとする

ゲームにおける解としてはさまざまなものが提案されているが, その 1 つにナッシュ均衡がある．ナッシュ均衡とは, どのプレイヤーも他のプレイヤーが戦略を変えない限り自分の戦略をどう変えても利得を大きくできない戦略の組み合わせのことである．

コンジェスチョンゲームではナッシュ均衡が必ず存在することが知られている [11]．これは, コンジェスチョンゲームではポテンシャル関数

$$\Phi(X) = \sum_{a \in A} \sum_{l=0}^{\sigma_a(X)} c_a(l)$$

が定義できて,

$$\Phi(X_{-i}, Q) - \Phi(X) = \pi_i(X_{-i}, Q) - \pi_i(X)$$

が成立し, Φ を局所的に最小化する戦略の組 X においてはどのプレイヤーも自分だけ戦略を変更しても自身のコストを小さくできないからである．また, 利己的なプレイヤー達が自身のコストを小さくするように戦略を変更していくとポテンシャル関数も減少していくため, 必ずナッシュ均衡に到達することもわかる．

しかし, ナッシュ均衡に到達するのは一般には指数時間かかってしまうことがわかっている．そこで, プレイヤーがそれぞれ戦略を変更するとき, どんなクラスのコンジェスチョンゲームでは多項式時間でナッシュ均衡に到達するかが研究されている．Ackermannら [1] は, マトロイドコンジェスチョンゲームというクラスでは, 各プレイヤーが自身のコストを最小化するように戦略を変える最適応答列によって多項式時間でナッシュ均衡に到達することを示した．ここでマトロイドコンジェスチョンゲームとは, 任意のプレイヤー i の戦略 $\mathcal{X}_i \subseteq 2^A$ が資源集合 A 上のマトロイド $\mathcal{M}_i$ の基族となっているコンジェスチョンゲームである．

2　多重集合のコンジェスチョンゲーム

これまでのコンジェスチョンゲームでは 1 人のプレイヤーは 1 つの資源を高々 1 回までしか使えないものだった．ここで 1 つの資源を同一のプレイヤーが複数回使ってもよい多重集合コンジェスチョンゲームを導入する．これも, (1) 式の組で表される．N はプレイヤーの集合 ($|N| = n$), A は資源の集合 ($|A| = m$), $\mathcal{X}_i \subseteq \mathbb{Z}^A_{\geq 0}$ はプレイヤー $i \in N$ がとれる戦略の集合であり, $\mathcal{X}_i$ の戦略 $X_i \in \mathbb{Z}^A_{\geq 0}$ を $(X_{i,a})_a \in A$ で表し, $X_{i,a}$ はプレイヤー i が a を何回使うかを表すものとする．$c_a(a \in A)$ は資源 a を使うプレイヤーの合計回数に対するコストの関数である．

ここで, プレイヤーが 1 つの資源を使う回数に応じて, その資源を使うコストが増加するように定義するのが自然であるが, その方法は 1 通りではない．

プレイヤーの戦略 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ の下で $\sigma_a(X) = \sum_{j \in N} X_{j,a}$ を a が使われる合計回数とす

ると, Harksら [6] は i が a を使うコスト $c_{a,i}(X)$ を

$$c_{a,i}(X) = X_{i,a} c_a(\sigma_a(X))$$

と定義し, 戦略の集合がポリマトロイドのときにナッシュ均衡が存在することを示した.

それに対し我々は $c_{a,i}(X)$ を

$$c_{a,i}(X) = \sum_{k=1}^{X_{i,a}} c_a(\sigma_a(X) - k + 1)$$

と定義する ($X_{i,a} = 0$ のとき $c_{a,i}(X) = 0$ とする). i のコスト $\pi_i(X)$ は

$$\pi_i(X) = \sum_{a \in A} c_{a,i}(X)$$

となる. このとき, ポテンシャル関数

$$\Phi(X) = \sum_{a \in A} \sum_{l=0}^{\sigma_a(X)} c_a(l)$$

が定義できるため, 先と同じ議論から, 任意の戦略集合の下でナッシュ均衡が存在することがわかる.

3 ポリマトロイドコンジェスチョンゲーム

多重集合コンジェスチョンゲーム Γ に対して, 任意のプレイヤー i で $\mathcal{M}_i = (A, \mathcal{X}_i)$ が整ポリマトロイド ($\mathcal{X}_i$ が基) のとき, ポリマトロイドコンジェスチョンゲームという. ここで, $\mathcal{M}_i$ のランクを $\mathcal{X}_i$ の元の成分和とし, $\mathrm{rank}(\Gamma) = \max_{i \in N} \mathrm{rank}\mathcal{M}_\mathrm{i}$ とする.

定理 1. ポリマトロイドコンジェスチョンゲームではプレイヤーの $O(mn^2(\mathrm{rank}(\Gamma))^2)$ 回の最適応答によってナッシュ均衡に到達する.

この結果は, マトロイドコンジェスチョンゲームに対しての Ackermannら [1] のものの拡張となっている.

全てのコスト

$$c_a(k) \ \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n\mathrm{rank}(\Gamma), |A| = m)$$

を非減少の順に並べる. このとき新しくコスト $\tilde{c}_a : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $\tilde{c}_a(i) = (c_a(i)$ の順位) と定義する. c の値が等しいとき $\tilde{c}$ の値も等しい. このとき, $1 \leq \tilde{c}_a(k) \leq mn\mathrm{rank}(\Gamma)$ である. 次が成り立つ.

補題 1. $X = (X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$ に対するプレイヤー i の最適戦略を X_i^* とし, $c_a(i)$ に対する i のコスト π_i を厳密に減少させるとする. このとき, $X^* = (X_1, \ldots, X_i^*, \ldots, X_n)$ は $\tilde{c}_a(i)$ に対するコスト $\tilde{\pi}_i$ も厳密に減少させる.

この補題より, プレイヤー i がコスト c の下で最適応答すると, $\tilde{c}$ の下でも i のコストは減少し, $\tilde{\Phi}$ は減少する.

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{\Phi}(X) &= \sum_{a \in A} \sum_{i=1}^{\sigma_a(X)} \tilde{c}_a(i) \\ &\leq mn^2(\mathrm{rank}(\Gamma))^2 \end{aligned}$$

であり $\tilde{\Phi}$ は整数値であることから, 高々 $mn^2(\mathrm{rank}(\Gamma))^2$ 回のプレイヤーの最適応答によってナッシュ均衡に到達する.

参考文献

[1] H. Ackermann, H. Röglin and B.Vöcking: On the Impact of Combinatorial Structure on Congestion Games. *Journal of the ACM*, **55** (2008), pp. 25:1–25:22.

[2] J. Edmonds: Submodular Functions, Matroids and Certain Polyhedra. In *Combinatorial Structures and Their Applications* (R. Guy, H. Hanani, N. Sauer and J. Schönheim, eds.), Gordon and Breach, New York (1970), pp. 69–87.

[3] A. Fabrikant, C. Papadimitriou and K. Talwar: The Complexity of Pure Nash Equilibria. In *Proceedings of the 36th ACM Symposium on Theory of Computing*, (2004), pp. 604–612.

[4] D. Fotakis: Congestion Games with Linearly Independent Paths: Convergence Time and Price of Anarchy. *Theory of Computing Systems*, **47** (2010), pp. 113–136.

[5] S. Fujishige, M. Goemans, T. Harks, B. Peis and R. Zenklusen: Congestion games viewd from M-convexity. *Operations Research Letters*, **43** (2015), pp. 329–333.

[6] T. Harks, M. Klimm and B. Peis: Resource Competition on Integral Polymatroids. In *Proceedings of the 10th Web and Internet Economics*, (2014), pp. 189–202.

[7] R. Holzman and N. Law-yone: Network Structure and Strong Equilibrium in Route Selection Games. *Mathematical Social Sciences*, **46** (2003), pp. 193–205.

[8] S. Ieong, R. McGrew, E. Nudelman, Y. Shoham and Q. Sun: Fast and Compact: A Simple Class of Congestion Games. In *Proceedings of the 20th American Association for Artificial Intelligence*, (2005), pp. 489–494.

[9] D. S. Johnson and C. H. Papadimitriou: How Easy Is Local Search? *Journal of Computer and System Sciences*, **37** (1988), pp. 79–100.

[10] J. F. Nash: Equilibrium Points in n-Person Games. *National Academy of Sciences*, **36** (1950), pp. 48–49.

[11] R. W. Rosenthal: A Class of Games Possessing Pure-Strategy Nash Equilibria. *International Journal of Game Theory*, **2** (1973), pp. 65–67.

[12] H. Whitney: On the Abstract Properties of Linear Dependence. *The American Journal of Mathematics*, **57** (1935), pp. 509–533.