

代用電荷法における高精度な近似解を与える点配置の決定

数理情報学専攻 48176220 平野 広明

指導教員 田中 健一郎 准教授

1 概要

偏微分方程式の数値解法の一つ、代用電荷法における高精度な近似解を与える点配置の問題を取り扱う。代用電荷法は、Laplace 方程式の境界値問題などのポテンシャル問題によく用いられ、実装の容易さや計算量の少なさなどの簡便さを特徴とする。代用電荷法では、電荷点、選点と呼ばれる 2 種類の点配置を決める必要がある。これらの点配置は解の精度に大きな影響を与えるが、一般領域の場合には実用的で高精度かつ理論的に精度が保証された点配置が知られていない。選点については、理論的に精度が保証された点配置として拘束条件を表す式に現れる行列の行列式を最大化する点配置 (Fekete 点) が知られているが、その簡単な求め方は知られていない。

本研究では、この行列式を近似的に最大化する問題を解き、得られた解を代用電荷法における選点とする手法を提案する。数値実験により、2次元領域、調和的な境界条件、選点・電荷点の個数がある程度大きい、電荷点が境界からある程度離れているという場合には、提案手法による配置が他の点配置よりも高精度になり得ることを確認した。これは、電荷点が境界からある程度離れている場合には、提案手法による配置では解くべき連立一次方程式が悪条件になりにくいためだと考えられる。

本研究の意義は、行列式を近似的に最大化する具体的な数値計算手法を提案した点、経験則に依らず自動的に高精度な近似解を与え得る選点配置を得た点、その点配置を用いて数値実験を行い有効性を確認した点にある。

2 代用電荷法の概要

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界かつ単連結な領域とし、その境界を $\partial\Omega$ とする。領域 Ω の閉包を $\bar{\Omega}$ で表す。 Δ を Laplace 作用素、 f を境界 $\partial\Omega$ 上の関数として、領域 Ω における

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

という Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を本研究では扱う。 $E(x) = \log|x|$ とおく。 $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}^2 \setminus$

$\bar{\Omega}$, $Q_1, \dots, Q_N \in \mathbb{R}$ として、代用電荷法では解を

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^N Q_k E(x - y_k) \quad (2)$$

という形で近似する。代用電荷法では y_1, \dots, y_N を電荷点、 Q_1, \dots, Q_N を電荷と呼ぶ。 Q_1, \dots, Q_N は選点 $x_1, \dots, x_N \in \partial\Omega$ を定め、 $u^{(N)}(x_j) = f(x_j)$, $j = 1, \dots, N$ という拘束条件により定める。 $A = (E(x_j - y_k))_{1 \leq j, k \leq N}$, $Q = (Q_1 \cdots Q_N)^\top$, $f = (f(x_1) \cdots f(x_N))^\top$ とおくと、拘束条件の式は連立一次方程式

$$AQ = f \quad (3)$$

になる。

代用電荷法における高精度な近似解を与える選点として、[2] では (代用電荷法における一般化された) Fekete 点が導入された。Fekete 点は次の最適化問題の解として与えられる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && |\det A|, \\ & \text{subject to} && x_1, \dots, x_N \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Fekete 点を選点とした代用電荷法では、

$$\begin{aligned} & \max_{x \in \partial\Omega} |u(x) - u^{(N)}(x)| \\ & \leq (N+1) \inf_{g \in \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_N\}} \left(\max_{x \in \partial\Omega} |u(x) - g(x)| \right) \end{aligned} \quad (5)$$

が成立する。ただし、 $\psi_j(x) = E(x - y_j)$ とおいた。よって、 $|\det A|$ の最大化問題の解を代用電荷法の選点に定めると高精度な近似解が得られる。

3 行列式最大化問題の解を選点配置とする手法

$|\det A|$ の最大化は困難なため、 $\det A$ の近似を考える。電荷点が選点よりも原点から遠いこと、つまり $\min_k |y_k| > \max_k |x_k|$ を仮定する。ここで、対数関数のフーリエ級数を有限項で打ち切るという近似 [1] を利用する。

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 1 & (k=1), \\ r_x^{\frac{k}{2}} \cos \frac{k}{2} \theta_x & (k: \text{even}), \\ r_x^{\frac{k-1}{2}} \sin \frac{k-1}{2} \theta_x & (k \geq 3, k: \text{odd}) \end{cases}$$

とおくと、十分大きな N に対して

$$F := \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_N(x_1) & \cdots & \varphi_N(x_N) \end{pmatrix}$$

の行列式 $|\det F|$ を最大化すれば、近似的に $|\det A|$ を最大化できる。

$|\det F|$ の最大化のために、 $\det (FF^\top) = (\det F)^2$ の最大化をする。 $\varphi(x_k) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_k) & \cdots & \varphi_N(x_k) \end{pmatrix}^\top$ とおくと、 $FF^\top = \sum_{k=1}^N \varphi(x_k)\varphi(x_k)^\top$ と表せる。ここで、 FF^\top が選点 x_k ごとに定まる行列の和で表せていることがわかる。

さらに、境界を離散化して選点の候補点集合 $\{x'_1, \dots, x'_M\}$ から選点を N 個選ぶことを考える。ここで、 $M \gg N$ とする。候補点集合から $|\det F|$ を最大化する点集合を選ぶ問題は組合せ最適化問題であり解くのが困難である。

そこで、さらに問題を連続緩和し

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \det \left(\sum_{k=1}^M w_k \varphi(x'_k) \varphi(x'_k)^\top \right), & (6) \\ & \text{subject to} && \sum_{k=1}^M w_k = N, \\ & && 0 \leq w_k \leq 1, k = 1, \dots, M \end{aligned}$$

を解くことを考える。この問題は目的関数が対数凹関数であるため、元の最適化問題よりも解きやすい問題である。この問題を解いて得られた解 $\{w_k\}_{k=1}^M$ に対し、 w_k が極大となる k に対応する候補点 x'_k を (w_k の値が大きい順に) N 個選び、選点として採用する。

4 数値実験

$|\det A|$ の最大化の問題 (4) に対する近似問題 (6) を数値的に解き選点を得て、代用電荷法を適用した数値実験結果を示す。

例として、

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)), \\ r(t) &= 1 + \frac{\sin(7\pi t)}{4}, \theta(t) = \pi t + \frac{\sin(7\pi t)}{2} \end{aligned}$$

で表されるギア型領域 Ω を考える。電荷点は半径 $R = 2$ の円周上に等間隔に配置した。選点の候補点数は $M = 700$ であった。選点数を $N = 63$ としたときに得られた点配置と、境界条件 $f(x, y) = x^2 - y^2$ に対する

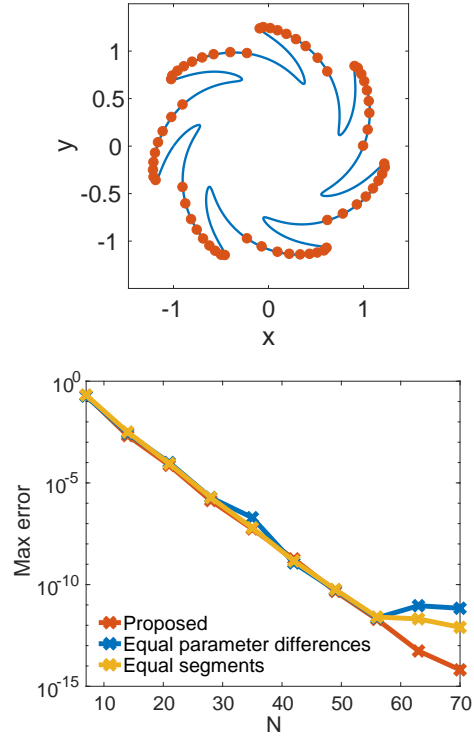


図 1: ギア型領域において得られた点配置と調和的な境界条件 $f(x, y) = x^2 - y^2$ に対する誤差

近似誤差を図 1 に示す。誤差は、パラメータが一定間隔になる点配置、弧長が一定間隔になる点配置と比較している。提案手法により得られた点配置は、 N が大きいところでも高精度であることが示されている。

5 結論

本研究では代用電荷法における高精度な選点配置を得るため、行列式最大化問題の解を選点とする手法を提案した。行列を展開することで目的関数の近似を行い、さらに境界の離散化、問題の連続緩和を行って近似的な最適化問題を構成し、選点配置を得るという手法である。数値実験では、得られた選点配置に対して代用電荷法を適用すると、電荷点が境界からある程度離れている場合には比較的高精度になるとわかった。理論的な誤差評価や他の支配方程式への適用が今後の課題である。

参考文献

- [1] P. R. S. Antunes. Reducing the ill conditioning in the method of fundamental solutions. *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 44, No. 1, pp. 351–365, 2018.
- [2] 杉原正顕. 調和関数の近似について (数値解析の基礎理論とその周辺). 数理解析研究所講究録, Vol. 676, pp. 251–261, 1988.