ネットワーク最適化における LP 拡張定式化を与える通信プロトコルの構成

数理情報学専攻 48-166216 牛丸 陽太
指導教員 平井 広志 准教授

1 はじめに

組合せ最適化問題を多面体上の線形計画法を用いて解くときに, その制約式の本数は一般に膨大になる. そういった問題に対して, 新たな変数を導入することで問題を変えずに制約式を減らした定式化を与えることができる例が存在する. そのような定式化を拡張定式化と呼ぶ. 拡張定式化は Yannakakis をはじめとする研究者らにより一般的な理論が確立された. これにより, 多面体の構造を表すスラック行列の非負分解を通して拡張定式化が構成できるようになった. また, この行列の非負分解に通信プロトコルの概念が導入されたことで, 行列を計算するプロトコルの構成をすることで拡張定式化を与えることが可能となった.

本研究ではネットワーク最適化問題に現れる線形計画について扱っている. 特に発表ではグラフの任意の 2 点間に r_{ij} 本の辺素パスが引けるように解を設計する連結度要求条件について触れる. 連結度要求条件によるサバイバブルネットワーク設計問題における既存の拡張定式化としてフロー変数を導入したものがあるが, それと同等の本数の拡張定式化を与える通信プロトコルを設計した. この際に Faenza らが設計した全域木多面体の拡張定式化を与える通信プロトコルを拡張している.

2 既存研究

組合せ最適化において問題の解を頂点とする多面体を考え, その多面体上で目的関数を最適化するという手法がよく知られている. しかしながらこの手法における定式化ではしばしば不等式の本数が入力サイズの指数となる. このような定式化を問題を変えずに書き換え, 不等式の本数が入力サイズの多項式本で与えられた場合は理論実用の両面で高速な内点法 [10] を用いて多項式時間で解くことが可能となるため, 不等式の本数を減らすことは問題を解く上で重要である.

不等式の本数を減らす研究の一つとして, 変数の次元を上げることにより不等式の本数を減らすものがある. 例えば最小全域木問題を線形計画で解く際の全域木多面体につてい, Edmonds [4] により頂点数 n の指数本の不等式から成る不等式系が与えられ, 後に Martin [12] により多項式サイズの不等式から成る不等式系をもとの変数空間に射影したものと一致することが示された. このような再定式化を拡張定式化と呼ぶ.

この拡張定式化の分野の草分け的な研究として, Yannakakis の定理 [14] がある. この定理では, 拡張定式化と行列の非負分解が密接な関係があること, およびネットワーク最適化における定式化の行列の非負分解を決定性通信プロトコルを用いて直観的に捉えることができることが示された. 前者の拡張定式化と非負分解については Fiorini ら [7] によって, 後者の非負分解と通信プロトコルについては Faenza ら [6] によって後に拡張されることになる. これらの理論を実際に指数本の不等式からなる多面体に適用することを考えると, 大きく以下の二種類の方針に分けられる. (I) 多項式本の不等式系では拡張定式化できないことを示す, (II) 多項式本の不等式系での拡張定式化を構成する. (I) については Fiorini ら [7] によってカット多面体や TSP 多面体などについて多項式本での拡張定式化が存在しないことが示された. また, Rothvoß [13] によってマッチング多面体についても同様の結果が示されている. (II) については Faenza ら [6] が既存の全域木多面体の拡張定式化について, 自身らがこの分野に導入した乱択通信プロトコルの考え方を用いて再解釈をしている. 近年では Iwata ら [9] による疎性マトロイド多面体の多項式サイズの拡張定式化を構成する研究も挙げられる.

3 本研究の成果

本研究では既存の拡張定式化に対して同じサイズの定式化を与える通信プロトコルを構成した. 大きく以下の二つの内容から成る:

I) サバイバブルネットワーク設計問題に対して, 特定の条件を加えることで多項式サイズの拡張定式化を与えられる例がある. それぞれの不等式系には以下のような本数の不等式が必要となる:

- 連結度要求条件: $O(mn)$ [11],
- 平面的グラフにおけるパーフェクトマッチング多面体: $O(m^2)$ [8].

このような多面体, あるいは多面体対に対して乱択通信プロトコルを構成するという手法で拡張定式化を改めて構成した.

II) 非有界多面体についてもスラック行列が定義されている [2]. 既存研究で多項式本数の定式化が与えられている以下の非有界多面体,

- カットドミナント: $\mathrm{O}(mn)$ [3],
- 根付き有向木ドミナント: $\mathrm{O}(m)$ [5],
- 閉路錐: $\mathrm{O}(m^2)$ [1]

についてのスラック行列を乱択通信プロトコルで計算可能であることを示し, 同じオーダーの本数の不等式系を与えるプロトコルを構成した.

この要旨では以下で, 連結度要求条件におけるサバイバブルネットワーク設計問題におけるアイデアについて軽く触れる. これは以下の定式化で表される多面体に関する問題である:

$$\begin{aligned} &x(\delta(S)) \geq f(S) \quad (\forall S : \emptyset \subset S \subset V), \\ &x \in [0,1]^m. \end{aligned}$$

ここで, 計算するべきスラック行列値は整数解を x として, $x(\delta(S)) - \max_{i\in S, j\notin S} r_{ij}$ である. ただし, m' は $m' = |x|_1$ とする.

プロトコル　連結度要求のスラック値の計算

Input: Alice ← 頂点部分集合 S

Bob ← 整数解 x

Output: $x(\delta(S)) - \max_{i\in S, j\notin S} r_{ij}$

Alice: $\max_{i\in S, j\notin S} r_{ij}$ をみたす頂点 i, j を Bob へ

Bob: 頂点 i, j 間に $\max_{i\in S, j\notin S} r_{ij}$ 本の辺素パスを引き, $i \to j$ 方向に向き付け

x 上の辺を 1 本選び, Alice へ

Alice: $\vec{e} \in \delta^-(S)$ または $e \in \delta(S)$ なら 1 を送る

Bob: 送られてきた値に従い, 以下の出力をする

$$\begin{cases} \vec{e} \in \delta^-(S) \to 2m' \\ e \in \delta(S) \quad \to m' \\ \text{o.w.} \qquad \to 0 \end{cases}$$

プロトコルのの非負の値を出力できないという制約のため, $-\max_{i\in S, j\notin S} r_{ij}$ を実現することが難しくなっている. ここで, Faenza ら [6] のアイデアを用いる. Bob の持つ整数解は連結度要求を満たすので, i-j 間に $\max_{i\in S, j\notin S} r_{ij}$ 本の辺素パスが引け, そのそれぞれから -1 をすることで $-\max_{i\in S, j\notin S} r_{ij}$ を実現している. また, このプロトコルは $\mathrm{O}(n^2m)$ の拡張定式化を与えるが, Gomory-Hu の, 連結度を表す全域木を用いることで $\mathrm{O}(nm)$ に下げることが可能である.

参考文献

[1] F. Barahona: Reducing matching to polynomial size linear programming. *SIAM Journal on Optimization*, vol. 3(4), (1993), pp. 688–695.

[2] G. Braun, S. Fiorini, S. Pokutta, and D. Steurer: Approximation limits of linear programs (beyond hierarchies). *Mathematics of Operations Research*, vol. 40(3), (2015), pp. 756–772.

[3] R. D. Carr, G. Konjevod, G. Little, V. Natarajan, and O. Parekh: Compacting cuts: a new linear formulation for minimum cut. *ACM Transactions on Algorithms*, vol. 5(3), (2009), no. 27.

[4] J. Edmonds: Matroids and the greedy algorithm. *Mathematical Programming*, vol. 1(1), (1971), pp. 127–136.

[5] J. Edmonds: Edge-disjoint branchings. *Combinatorial Algorithms* (R. Rustin, ed.), Academic Press, New York, (1973), pp. 91–96.

[6] Y. Faenza, S. Fiorini, R. Grappe, and H. R. Tiwary: Extended formulations, nonnegative factorizations, and randomized communication protocols. *Mathematical Programming*, vol. 153(1), (2015), pp. 75–94.

[7] S. Fiorini, S. Massar, S. Pokutta, H. R. Tiwary, and R. de Wolf: Linear vs. semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds. In *Proceedings of the 44th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, (2012), pp.95–106.

[8] A. M. H. Gerards: Compact systems for T-join and perfect matching polyhedra of graphs with bounded genus. *Operations Research Letters*, vol. 10(7), (1991), pp. 377–382.

[9] S. Iwata, N. Kamiyama, N. Katoh, S. Kijima, and Y. Okamoto: Extended formulations for sparsity matroids. *Mathematical Programming*, vol. 158(1–2), (2016), pp. 565–574.

[10] N. Karmarkar: A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, (1984), pp. 302–311.

[11] T. L. Magnanti and S. Raghavan: Strong formulations for network design problems with connectivity requirements. *Networks*, vol. 45(2), (2005), pp. 61–79.

[12] R. K. Martin: Using separation algorithms to generate mixed integer model reformulations. *Operations Research Letters*, vol. 10(3), (1991), pp. 119–128.

[13] T. Rothvoß: The matching polytope has exponential extension complexity. *Journal of the ACM*, vol. 64(6), (2017), no. 41.

[14] M. Yannakakis: Expressing combinatorial optimization problems by linear programs. *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 43(3), (1991), pp. 441–466.