修士論文 要旨

エクスペクタイル回帰を用いた不均一モデルの分位点推定

数理情報学専攻 48166221　高須佑哉

指導教員　清 智也 准教授

1　はじめに

分位点は確率変数を特徴付ける代表的な値の 1 つであり，回帰モデルにおける分位点の推定は重要な課題の 1 つである．

本研究では，従属変数 $Y \in \mathbb{R}$ の α-分位点が説明変数 $X \in \mathbb{R}^d$ の関数 $q_\alpha(X)$ として表されている状況を想定し，n 組の実現値 $(X,Y) = (x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ から，ある固定された $X = X_0$ のもとでの Y の α-分位点 $q_\alpha(X_0)$ を推定する問題について考える．また，ここでは不均一モデル，つまり残差 $\varepsilon = Y - q_\alpha(X)$ の分布が X によって異なる場合について考える．

代表的な手法としては分位点回帰 [3] が挙げられるが，不均一モデルにおいては通常の分位点回帰による推定量は漸近有効性を示さないことが知られている．また，漸近有効な推定量を構成するためには残差の密度関数の推定が必要となる [2]．分位点回帰以外の手法としてはエクスペクタイルを用いた推定方法が挙げられる [6]．この手法は，エクスペクタイル回帰を繰り返し用いて複数のエクスペクタイルを推定し，これらの値を用いて確率分布関数を推定することで分位点の推定値を求める，というものである．

本研究では，エクスペクタイルを用いた手法を改良することにより，不均一モデルにおける新しい分位点の推定手法を提案する．分位点回帰の場合と同様に，不均一モデルにおいて通常のエクスペクタイル回帰は漸近有効性を示さない．このことに着目し，提案手法では漸近有効性を示すようなエクスペクタイル回帰の手法を導出した上で，それを用いて分位点の推定を行う．

2　既存手法

2.1　分位点回帰

分位点回帰モデルでは，従属変数 $Y \in \mathbb{R}$ の α-分位点が説明変数 $X \in \mathbb{R}^d$ とパラメータ $\beta_\alpha \in \mathbb{R}^r$ を用いて $q(X,\beta_\alpha)$ と表される場合について考える．このとき，分位点回帰 [3] では以下のような最小化問題

$$\hat{\beta}_\alpha = \operatorname*{argmin}_\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,\alpha} \cdot |y_i - q(x_i,\beta)|$$

を解くことで，n 組の実現値から真のパラメータ β^*_α の推定値 $\hat{\beta}_\alpha$ を求める．ただし，ここで $\omega_{i,\alpha}$ は

$$\omega_{i,\alpha} = \begin{cases} 1-\alpha & (y_i < q(x_i,\beta)), \\ \alpha & (y_i \geq q(x_i,\beta)) \end{cases}$$

である．

2.2　不均一モデルにおける分位点回帰

通常の分位点回帰によって得られる推定値は，不均一モデルにおいて漸近有効性を示さない．不均一モデルにおいては，次のような重みつきの分位点回帰によって得られる推定量が漸近有効性を満たすことが知られている [2] ：

$$\hat{\beta}_\alpha = \operatorname*{argmin}_\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,\alpha} \, |y_i - q(x_i,\beta)| \cdot A(x_i),$$
$$A(x_i) = f\left(q(x_i,\beta^*_\alpha) | X = x_i\right).$$

ここで，$f(\cdot \,|\, X)$ は $Y|X$ の確率密度関数を表す．

ただし，一般に真の密度関数は未知であるため，密度関数の推定が必要となる．Neway and Pawell [4] は，カーネル密度推定の一種である k - 近傍法 [5] により推定された密度関数を用いて重みつきの分位点回帰を行う手法を提案した．

2.3　エクスペクタイルを用いた手法

エクスペクタイル (Expectile) とは，期待値 (Expectation) と分位点 (Quantile) をあわせたような概念で，$Y|X$ の τ-エクスペクタイル $m_\tau(X)$ は

$$m_\tau(X) := \operatorname*{argmin}_m \mathrm{E}\left[\omega_\tau (Y-m)^2 \middle| X\right]$$

として定義される．ただし，$\mathrm{E}[\cdot \,|\, X]$ は条件付期待値を表し，ω_τ は

$$\omega_\tau = \begin{cases} 1-\tau & (Y < m), \\ \tau & (Y \geq m) \end{cases}$$

である．

Y の τ-エクスペクタイルが X とパラメータ β_τ を用いて $m(X,\beta_\tau)$ と表されるようなエクスペクタイル回帰モデルにおいて，分位点の場合と同様に，エクスペクタイル回帰 [1] では以下のような最小化問題を解くことでパラメータの推定を行う:

$$\hat{\beta}_\tau = \operatorname*{argmin}_\beta \sum_{i=1}^n \omega_{i,\tau} \cdot (y_i - m(x_i,\beta))^2 .$$

Waltrup et al. [6] は，このエクスペクタイルを用いた分位点の推定手法を提案した．この手法は，まずエクスペクタイル回帰を用いて $X = X_0$ における複数のエクスペクタイルの値を推定し，それらの値を用いて $Y|X = X_0$ の分布関数を推定することで分位点の推定値を得る，というものである．

3 提案手法

不均一モデルにおいては，通常のエクスペクタイル回帰による推定値は漸近有効性を有さず，以下のような重みつきのエクスペクタイル回帰による推定値は漸近有効性を有する:

$$\hat{\beta} = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} \omega_{i,\tau} \{y_i - m(x_i, \beta)\}^2 \cdot A(x_i),$$
$$A(x_i) = \frac{(1-\tau)\alpha_\tau(x_i) + \tau(1-\alpha_\tau(x_i))}{\mathrm{E}_{Y|X}\left[\omega_\tau^2 \left(Y - m(x_i, \beta^*)\right)^2 \middle| X = x_i\right]}.$$

ただし，$\alpha_\tau(x_i) := F\left(m(x_i, \beta^*)|X = x_i\right)$ である．

提案手法では，[6] により推定された分布関数を用いて $\alpha_\tau(x_i)$，及び $\mathrm{E}_{Y|X}\left[\omega_\tau^2 \left(Y - m(x_i, \beta^*)\right)^2 \middle| X = x_i\right]$ の推定値を求めた上で，重みつきのエクスペクタイル回帰を行う．それによって推定された $Y|X = X_0$ におけるエクスペクタイルを用いて，[6] の手法により分位点の推定値を求める．以上より，提案手法においては密度関数の推定が必要とならないことが分かる．

4 数値実験

以下のような確率変数 $(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ についての数値実験を行う:

$$X \sim \mathrm{U}(1, 3),$$
$$Y = 1 + 2X + Xu.$$

ただし u は X と独立な 1 次元連続型確率変数であり，今回は $u \sim \mathrm{N}(0, 1)$ とする．このもとで，n 組の実現値 $(X, Y) = (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ を発生させ, $X = 1, 2, 3$ それぞれにおける分位点の推定を行う．分位点を推定する α としては, $\alpha = 0.1, 0.2, \ldots, 0.5$ の 5 つを用いた．また，分位点回帰モデル及びエクスペクタイル回帰モデルにおいては 1 次関数を仮定している．分位点の真値と推定値の 2 乗誤差を，$X = 1, 2, 3$ について平均した値をこの数値実験の推定誤差とし，推定を $T = 10^5$ 回繰り返し行うことで推定誤差の平均を求めた．また，この推定誤差の平均値に対する標準偏差として，$T = 10^5$ 個の推定誤差の標準偏差を $\sqrt{T}$ で除した値も記録した．

表 1. $u \sim \mathrm{N}(0, 1)$，$n = 50$ のときの推定誤差の平均値とその標準偏差 ($\times 10^2$)

Method	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.5$
QR	73.58 (0.29)	50.46 (0.19)	42.72 (0.16)	39.45 (0.15)	38.39 (0.14)
WQR	77.73 (0.31)	51.99 (0.20)	43.38 (0.16)	39.86 (0.15)	38.75 (0.15)
TWQR	69.60 (0.27)	48.05 (0.18)	40.72 (0.15)	37.65 (0.14)	36.63 (0.14)
QfromER	71.14 (0.27)	51.35 (0.19)	43.12 (0.16)	39.16 (0.14)	38.03 (0.14)
提案手法	68.37 (0.27)	48.67 (0.19)	40.90 (0.16)	37.51 (0.14)	36.57 (0.14)

表 1 は，$n = 50$ としたときの結果である．表 1 より，いずれの α においても提案手法が既存手法 (QR，WQR，QfromER) を改善していること，真の重みを用いた分位点回帰 (TWQR) と比較しても，提案手法は同程度の精度で分位点の推定を行うことが出来ていることが分かる．また QR と WQR の結果の比較から，特に α が小さいときに WQR における重み (密度関数) の推定が安定していないと考えられる一方で，QfromER と提案手法の結果の比較から，提案手法においては安定してエクスペクタイル回帰の重みが推定出来ていることも見てとれる．

5 まとめ

本研究では，分位点の推定方法として代表的ないくつかの手法を紹介した後，漸近有効性を有するエクスペクタイル回帰を導出し，それを用いた不均一モデルにおける分位点の新しい推定方法を提案した．また数値実験を通して，既存手法と提案手法の推定精度の比較を行った．

参考文献

[1] Aigner, D., Amemiya, T. and Poirier, D. (1976): On the estimation of production frontiers: maximum likelihood estimation of the parameters of a discontinuous density function. *International Economic Review*, **17**, 377–396.
[2] Koenker, R. (2005): *Quantile Regression*, Cambridge University Press, New York.
[3] Koenker, R. and Basett, G. (1978): Regression quantiles. *Econometrica*, **46**, 33–50.
[4] Newey, W. and Powell, J. (1990): Efficient estimation of linear and type I censored regression models under conditional quantile restrictions. *Econometric Theory*, **6**, 295–317.
[5] Stone, C. (1977): Consistent nonparametric regression. *The Annals of Statistics*, **5**, 595–645.
[6] Waltrup, L., Sobotka, F., Thomas, K. and Kauermann, G. (2015): Expectile and quantile regression—David and Goliath? *Statistical Modeling*, **15**, 433–456.