修士論文 要旨

浅水方程式に対する複数保存スキームの構築

数理情報学専攻 48166218　杉渕 優也
指導教員　松尾 宇泰 教授

1 背景

浅水方程式は，水平方向のスケールに比べて鉛直方向のスケールが非常に小さいと仮定した時の流体運動を表す方程式で，以下の連立非線形偏微分方程式で表される．

$$\begin{cases} u_t = -uu_x - vu_y - gh_x, & \text{(1a)} \\ v_t = -uv_x - vv_y - gh_y, & \text{(1b)} \\ h_t = -(hu)_x - (hv)_y. & \text{(1c)} \end{cases}$$

ここで，u, v はそれぞれ x, y 方向の速度を，h は鉛直方向の水面の高さを表す．g は定数である．浅水方程式は，全エネルギーに相当するハミルトニアン (2) と，流体の回転のエネルギーを表すポテンシャルエンストロフィー (3) と呼ばれる以下の 2 つの量が保存することが知られており，数値計算の際にもこの 2 つの量が保存されるようにスキームを構成することが望ましい．

$$H = \frac{1}{2}\iint \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,(hu^2 + hv^2 + gh^2), \tag{2}$$

$$Z = \frac{1}{2}\iint \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\frac{(v_x - u_y)^2}{h}. \tag{3}$$

浅水方程式に対してこの両方を保存する空間離散スキームは [1] によって導出されたもの (AL スキーム) が広く知られている．これらの量はともに単純な保存量でないため，離散的に保存させるには一般的には難しい．[1] はこれをある種 Brute-force な手法で達成した．

Salmon [4] は，浅水方程式のポアソン括弧表現を利用した空間離散化によって，AL スキームとその保存則の導出を再定式化した．更に，[5, 6] ではポアソン括弧を拡張した南部括弧 [3] を用いることによって 2 つの保存則を明示的にした形式を提案し，その上で 2 つの保存則を保つ一般的な空間離散化手法を提案した．

これらの既存研究はいずれも空間離散化について述べたものであり，時間離散化については浅水方程式に対しては考えられていない．そこで本研究では，時間方向に 2 つの保存量を保つスキームの導出を目的とした．Salmon によって示されたポアソン括弧形式及び南部括弧形式と，時間方向について保存則を再現する離散変分法 [2] を応用し，時間離散ポアソン括弧及び時間離散南部括弧を提案した．そして，時間離散南部括弧を用いて 2 つの量を保存する全離散スキームを提案した．

2 ポアソン括弧・時間離散ポアソン括弧

まず，1 つの保存則を再現する手法として時間離散ポアソン括弧について述べる．浅水方程式に対するポアソン括弧 $\{A, B\}$ は，2 汎関数 $A[u, v, h], B[u, v, h]$ の関数として以下のように定義される．

$$\{A, B\} = \iint \mathrm{d}\boldsymbol{x}\left[q\frac{\delta(A, B)}{\delta(u, v)} - \frac{\delta A}{\delta \mathbf{u}}\cdot\nabla\frac{\delta B}{\delta h} + \frac{\delta B}{\delta \mathbf{u}}\cdot\nabla\frac{\delta A}{\delta h}\right]. \tag{4}$$

ただし，$q = (v_x - u_y)/h,\ \delta(A, B)/\delta(u, v) = (\delta A/\delta u)(\delta B/\delta v) - (\delta B/\delta u)(\delta A/\delta v),\ \delta A/\delta \mathbf{u} = (\delta A/\delta u, \delta A/\delta v)$ である．また，ポアソン括弧は歪対称性 $\{A, B\} = -\{B, A\}$ を持つ．

このポアソン括弧とハミルトニアン H を用いて，浅水方程式を以下のように表すことができる．

$$u_t = \{u, H\},\ v_t = \{v, H\},\ h_t = \{h, H\}. \tag{5}$$

このとき，任意の汎関数 $F[u, v, h]$ に対して，その時間微分がポアソン括弧を用いて $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t = \{F, H\}$ と表すことができる．従って，F として H を取ると，ポアソン括弧の歪対称性より $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = \{H, H\} = 0$ が成立し，H が保存量であることが示される．

以上のように，ポアソン括弧の性質から保存則が導かれることが分かる．本研究では，これを離散的に再現した時間離散ポアソン括弧という考え方が可能であることを提唱する．ポアソン括弧 (4) の離散化として，以下のような時間離散ポアソン括弧 (6) を定義する．ここで，$\boldsymbol{u} = (u, v, h)$ であり，$\frac{\delta A}{\delta(\tilde{u}, u)}$ は $A(\tilde{u}) - A(u) = \int \frac{\delta A}{\delta(\tilde{u}, u)}(\tilde{u} - u)\,\mathrm{d}x$ で定義される離散変分導関数である．

$$\begin{aligned} &\{A, B\}_{\mathrm{d}}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}) \\ &= \iint \mathrm{d}\boldsymbol{x}\left[\bar{q}\left\{\frac{\delta A}{\delta(\tilde{u}, u)}\frac{\delta B}{\delta(\tilde{v}, v)} - \frac{\delta B}{\delta(\tilde{u}, u)}\frac{\delta A}{\delta(\tilde{v}, v)}\right\}\right. \\ &\quad - \frac{\delta A}{\delta(\tilde{u}, u)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta B}{\delta(\tilde{h}, h)} - \frac{\delta A}{\delta(\tilde{v}, v)}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta B}{\delta(\tilde{h}, h)} \\ &\quad \left. + \frac{\delta B}{\delta(\tilde{u}, u)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta A}{\delta(\tilde{h}, h)} + \frac{\delta B}{\delta(\tilde{v}, v)}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta A}{\delta(\tilde{h}, h)}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

そして，スキームを以下のように定義する．ただしここでは u のみについて記したが，v, h についても同様に定義する．

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} = \{u, H\}_{\mathrm{d}} (\boldsymbol{u}^{(n+1)}, \boldsymbol{u}^{(n)}). \qquad (7)$$

このとき，連続系と同様に任意汎関数 F に対して $[F(\tilde{\boldsymbol{u}}) - F(\boldsymbol{u})]/\Delta t = \{F, H\}_{\mathrm{d}} (\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u})$ が成立することを示すことができる．時間離散ポアソン括弧は連続系と同じく歪対称性 $\{A, B\}_{\mathrm{d}} (\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}) = -\{B, A\}_{\mathrm{d}} (\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u})$ を持つので，離散エネルギー保存則 $[H(\tilde{\boldsymbol{u}}) - H(\boldsymbol{u})]/\Delta t = \{H, H\}_{\mathrm{d}} (\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u}) = 0$ が導出される．

3 南部括弧・時間離散南部括弧

ポアソン括弧では，括弧の歪対称性から保存則が導出された．これを 2 つの保存則に拡張したものが南部括弧 [3] である．南部括弧 $\{A, B, C\}$ は，3 汎関数 A, B, C の関数として定義され，3 変数に関する歪対称性 (奇置換で符号反転) を持つ．これをポアソン括弧の場合と同様に時間離散化することで，2 つの保存則を再現できる．

浅水方程式に対する南部括弧は，変数変換 $\zeta = v_x - u_y, \mu = u_x + v_y$ により (ζ, μ, h) の方程式にすることで導出される [5,6]．このとき，浅水方程式はある南部括弧 (具体形は略) とハミルトニアン H，ポテンシャルエンストロフィー Z を用いて以下のように表せる．

$$\zeta_t = \{\zeta, H, Z\}, \mu_t = \{\mu, H, Z\}, h_t = \{h, H, Z\}. \quad (8)$$

そして，ポアソン括弧と同様に任意汎関数 F について $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t = \{F, H, Z\}$ が成立し，2 つの保存則 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = \{H, H, Z\} = 0, \mathrm{d}Z/\mathrm{d}t = \{Z, H, Z\} = 0$ が導かれる．従って，これを離散系でも再現した時間離散南部括弧 $\{A, B, C\}_{\mathrm{d}} (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \boldsymbol{\zeta})$ (ただし $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta, \mu, h)$) を用いてスキーム

$$\frac{\zeta^{(n+1)} - \zeta^{(n)}}{\Delta t} = \{\zeta, H, Z\}_{\mathrm{d}} (\boldsymbol{\zeta}^{(n+1)}, \boldsymbol{\zeta}^{(n)}) \qquad (9)$$

を定義することで，ポアソン括弧と同様に 2 つの保存則 $[H(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}) - H(\boldsymbol{\zeta})]/\Delta t = \{H, H, Z\}_{\mathrm{d}} (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \boldsymbol{\zeta}) = 0, [Z(\tilde{\boldsymbol{\zeta}}) - Z(\boldsymbol{\zeta})]/\Delta t = \{Z, H, Z\}_{\mathrm{d}} (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \boldsymbol{\zeta}) = 0$ が導出される．

また，変数変換に伴い非自明かつ煩雑な離散変分導関数の導出が要求されるが，これを通常の離散変分導関数の導出手続とは異なった離散演算により解決した．

4 数値実験

離散変分法 (DVDM)，Arakawa-Lamb スキーム＋離散勾配法 (AL-DGM)，時間離散南部括弧 (NB) で数値実験を行った．2 つの保存量の時間変化の相対誤差を示した結果が図 1 である．

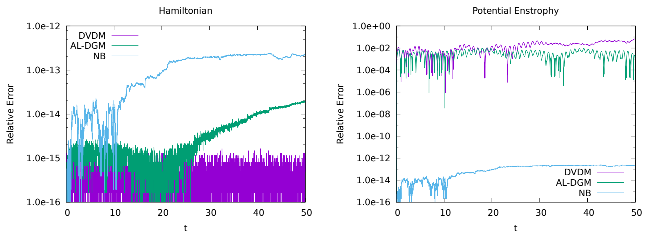

図 1. (左)H 保存性，(右)Z 保存性．横軸は時間 $[0, 50]$，縦軸は相対誤差の対数プロット (左) $[10^{-16}, 10^{-12}]$，(右) $[10^{-16}, 1]$．紫：DVDM，緑：AL-DGM，水色：NB．

x, y 方向周期境界，$x \in [0, 1], y \in [0, 1], t \in [0, 50]$, $\Delta x = \Delta y = 1/15, \Delta t = 1/100, g = 1$，初期値は $h(x, y, 0) = 1 + \exp[-10(x - 0.5)^2 - 10(y - 0.5)^2]/2$, $u(x, y, 0) = -\sin(\pi x)\sin(2\pi y)/2\pi$, $v(x, y, 0) = \sin(2\pi x)\sin(\pi y)/2\pi$ を与えた．

提案手法の時間離散南部括弧は，H, Z ともに保存性が良いことが分かる．しかし実験では時間刻み幅を小さくしないと計算できない場面が多々あり，計算コストやスキームの安定性の面では既存手法の方が上回った．

5 結論

時間離散ポアソン括弧及び時間離散南部括弧という新しい概念を提案し，浅水方程式に対して複数の保存量を再現するスキームを構築した．時間離散括弧と離散変分法等の他の構造保存解法の関連性の整理や，本手法の他の方程式への応用が今後期待される．

参考文献

[1] A. Arakawa and V. R. Lamb. A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equations. *Monthly Weather Review*, Vol. 109, No. 1, pp. 18–36, 1981.

[2] D. Furihata and T. Matsuo. *Discrete Variational Derivative Method: A Structure-Preserving Numerical Method for Partial Differential Equations*. CRC Press, 2010.

[3] Y. Nambu. Generalized Hamiltonian dynamics. *Physical Review D*, Vol. 7, No. 8, pp. 2405–2412, 1973.

[4] R. Salmon. Poisson-bracket approach to the construction of energy-and potential-enstrophy-conserving algorithms for the shallow-water equations. *Journal of the atmospheric sciences*, Vol. 61, No. 16, pp. 2016–2036, 2004.

[5] R. Salmon. A general method for conserving quantities related to potential vorticity in numerical models. *Nonlinearity*, Vol. 18, No. 5, pp. R1–R16, 2005.

[6] R. Salmon. A general method for conserving energy and potential enstrophy in shallow-water models. *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 64, No. 2, pp. 515–531, 2007.