確率微分方程式を用いた
コヒーレントイジングマシンのモデル化と性能評価

数理情報学専攻 48166215　**庄司泰萌**
指導教員　**合原一幸　教授**

1　背景

イジング模型とは物性物理学において磁性体を記述する簡易モデルである。イジング模型はグラフ $G=(V,E)$ 上に分布する原子の振る舞いを記述する。各原子は、上向き・下向きの 2 つの離散的な磁価（スピンと呼ばれる）を持つ微小な磁石と考えられる。この時、イジング模型のエネルギー関数は以下の形で与えられる。

$$H=\sum_{(i,j)\in E} J(i,j)\sigma(i)\sigma(j)+\sum_{i\in V} h(i)\sigma(i). \tag{1}$$

ここで、$J:E\to\mathbb{R}, h:V\to\mathbb{R}$ は各辺に与えられた結合の強さを表し、$\sigma:V\to\{-1,1\}$ は i 番目の原子の持つスピンの向きを表している。このようなイジング模型の最小エネルギー状態を求める問題は、特に三次元以上のグラフについて NP 困難な組合せ最適化問題であることが知られている。

イジング問題を物理的なデバイスにマッピングすることにより高速に解く試みが近年盛んに行われており、コヒーレントイジングマシン（CIM）もその一種である。。これらは、いずれも何らかの物理的対象をイジングスピンと見立て、それらに相互作用を与えエネルギー関数を再現することによって、イジング問題を解くことを試みるものである。

CIM においてイジングスピンの役割を担うものは光である。現行の CIM では非線形結晶によるパラメトリック発振を用いた縮退光パラメトリック発振 (DOPO) をイジングスピンとして取り扱っている。DOPO は位相 0 と位相 π の 2 種類の光が量子的な重ね合わせ状態として実現されており、注入ポンプが発振閾値を超えることによりいずれかの状態が実現される。CIM では位相 0 の光をスピン +1、位相 π の光をスピン-1 として解釈する。

従来の CIM ではイジングスピン間の結合をビームスプリッターと光遅延ケーブルを用いた相互注入によって行っていた光結合型であるが、近年主流となっているのは測定フィードバック回路を用いた相互注入である。光結合型の CIM に対しては理論的な研究が存在しているものの、測定フィードバック型 CIM に関する理論的枠組みは存在していなかった。そこで本研究では、測定フィードバック型 CIM を記述する理論モデルを提案し、数値実験をもとに評価を行った。

2　理論モデル

測定フィードバック型 CIM の理論モデルを図 1 に示す。この図は N 個の独立な共振器が非線形発振を行

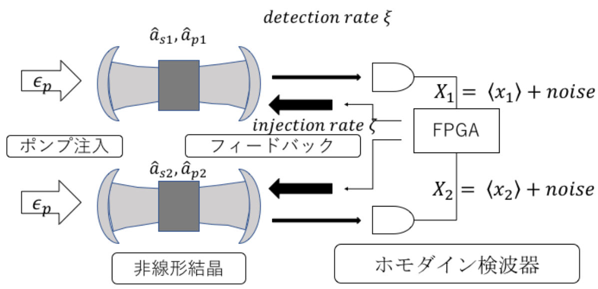

図 1. 測定フィードバック型 CIM の理論モデル (N=2)

なっており、測定フィードバックを行なっている。各共振器内にはシグナル光とポンプ光の 2 種類の場が存在しており、それぞれの減衰率が γ_s,γ_p、非線形結晶の結合定数が κ、読み取りの強さが ξ、そして、フィードバックの強度、すなわち結合の強さが ζ で与えられる。この理論モデルを 2 通りの方法で数値シミュレーションを行う。

ひとつは正 P 表示を用いた厳密な量子シミュレーションである。正 P 表示は量子状態の基本単位である密度行列を $P(\alpha,\beta)$ という 2 複素変数関数に落とし込んだものである。$P(\alpha,\beta)$ は冗長であるが、常に $P(\alpha,\beta)$ を実かつ正、また積分して 1 になるような変換を実現することが可能であることが知られており、密度行列を擬似的な確率分布に変換することが可能である。

これを用いて量子状態のダイナミクスを確率微分方程式に落とし込む。適宜規格化を行うと、

$$\begin{bmatrix} d\eta \\ d\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1+\xi')\eta+\mu(p_i-\eta_i^2)+f \\ -(1+\xi')\mu+\eta(p_i-\mu_i^2)+f \end{bmatrix} d\tau + \begin{bmatrix} g\sqrt{p-\eta^2}d\omega_\eta \\ g\sqrt{p-\mu^2}d\omega_\mu \end{bmatrix}. \tag{2}$$

ここで、$g = \kappa/\sqrt{2\gamma_s\gamma_p}$ は装置の物理パラメーターに依存した定数、$\eta = g\alpha, \mu = g\beta$ は確率微分方程式の変数、$\tau = \gamma_s t$ が時間スケール、$p = \epsilon_p/\gamma_p\gamma_s$ がポンプ光の注入強度、$f = g\epsilon_s/\gamma_s$ がフィードバックの強さである。この確率微分方程式に従う統計集団が一つの密度行列を表す。

一方でガウス近似とは密度行列を平均 μ 分散 σ を持つ純粋スクイーズド状態であると近似する方法である。これによって密度行列を 2 パラメーターのダイナミクスに変換することが可能であり、2 次元の実確率微分方程式として一つの DOPO の振る舞いを得ることができる。

$$d\mu_i = \sqrt{\xi}\left(\sigma_i^2 - \frac{1}{4}\right)dW + \left[-\gamma_s\mu + \frac{\kappa}{\gamma_p}\epsilon_p\mu - \frac{\kappa^2}{2\gamma_p}\left(\mu^3 + \frac{\mu_i}{\sigma_i^2}\left(\sigma_i^2 - \frac{1}{4}\right)\left(3\sigma_i^2 - \frac{1}{4}\right)\right) + \epsilon_{si}\right]dt, \tag{3}$$

$$d\sigma_i^2 = \left[-2\gamma_s\left(\sigma_i^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{2\kappa}{\gamma_p}\epsilon_p\left(\sigma_i^2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{\kappa^2}{2\gamma_p}\left(\frac{5}{8} + 6\sigma_i^4 + 6\sigma_i^2\mu_i^2 - \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \frac{3}{2}\mu_i^2 - \frac{3}{32\sigma_i^2}\right) - 4\xi\left(\sigma_i - \frac{1}{4}\right)^2\right]dt. \tag{4}$$

3 数値実験

以上の 2 種類の手法に対して、数値実験を用いて比較を行なった。 $N = 2$ のダイナミクスでは、それぞれの DOPO の分岐構造に明確な違いが見られた。

また、$N = 16$ の 1 次元反強磁性結合リングの場合について、結合強度を変化させながら計算性能を比較したところ、量子シミュレーションに基づく手法の方がよいパフォーマンスを示した (図 3(a))。このことは、ガウス近似を行ったことにより、無視された効果が、CIM の計算過程において重要な寄与を果たしている可能性を示唆している。また、光結合型と測定フィードバック型の 2 種類の CIM の量子モデルについてシミュレーションを行ったところ、測定原理が異なるために単純比較はできないものの、同等以上のパフォーマンスを示すことがわかった (図 3)。今後、この効果の詳細について更なる研究が必要である。

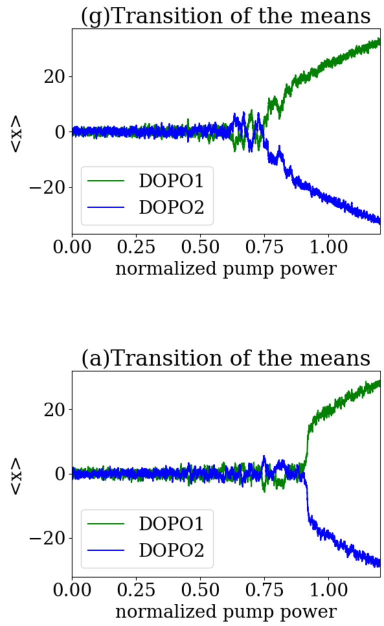

図 2. 波動関数の平均 $\langle x\rangle$(ガウス近似 (上) と量子シミュレーション (下))

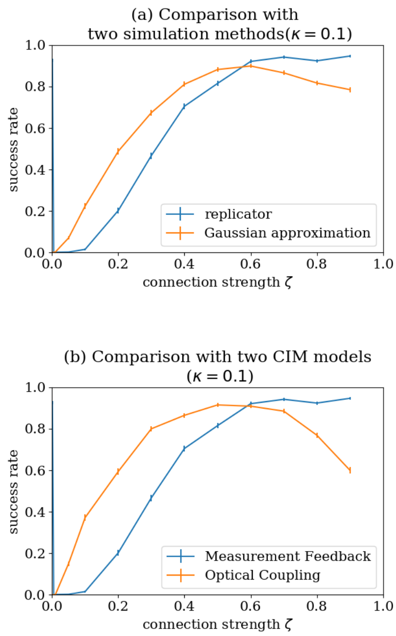

図 3. $N = 16$ 反強磁性体一次元リングにおける、CIM モデルの性能比較。(a) が量子モデルとガウス近似モデル、(b) が光結合型と測定フィードバック型の比較である。